

2  $n$  乗 N プロファイルをもつ  
不均一大気内の電波の伝搬に関する研究

明治大学理工学部 電子通信工学科

川口 順也

# 目次

|       |      |   |
|-------|------|---|
| 第 1 章 | まえがき | 1 |
|-------|------|---|

|       |                           |   |
|-------|---------------------------|---|
| 第 2 章 | $2n$ 乗 $N$ プロファイルをもつ均一ダクト | 7 |
|-------|---------------------------|---|

|         |                       |    |
|---------|-----------------------|----|
| 2. 1    | ヘルツ・ベクトル              | 7  |
| 2. 1. 1 | 電気型ヘルツ・ベクトル           | 8  |
| 2. 1. 2 | 磁気型ヘルツ・ベクトル           | 10 |
| 2. 2    | ヘルツ・ベクトルの 2 重フーリエ積分表示 | 11 |
| 2. 3    | 境界条件と偏波               | 13 |
| 2. 3. 1 | 垂直電気ダイポール             | 13 |
| 2. 3. 2 | 垂直磁気ダイポール             | 14 |
| 2. 4    | 波動関数                  | 15 |
| 2. 5    | 積分の評価                 | 20 |
| 2. 6    | $2n$ 乗 $N$ プロファイル・モデル | 22 |
| 2. 7    | 相対受信電界強度              | 30 |
| 2. 8    | モード方程式の根              | 33 |
| 2. 9    | 数値計算例とその検討            | 65 |
| 2. 9. 1 | 高度分布                  | 65 |
| 2. 9. 2 | 極大電界高度                | 67 |
| 2. 9. 3 | ダクト高による受信電界変動         | 69 |
| 2. 9. 4 | 空間分布                  | 72 |

第 3 章 2n 乗 N プロファイルをもつ不均一ダクト . . . 1 2 6

3. 1 結合係数 . . . 1 2 6

3. 1. 1 水平偏波 . . . 1 2 6

3. 1. 2 垂直偏波 . . . 1 3 2

3. 2 不均一ダクトでのヘルツ・ベクトル . . . 1 3 3

3. 3 数値計算例 . . . 1 4 0

3. 3. 1 N プロファイルによる極大高度変動 . . . 1 4 0

3. 3. 2 逆転大気モデルの結合係数 . . . 1 4 2

3. 3. 3 不均一ダクト内での空間分布 . . . 1 4 6

第 4 章 むすび . . . 2 1 6

謝 辞 . . . 2 1 7

参考文献 . . . 2 1 8

付 録 1 微分方程式  $g''(\xi) + (\xi^n + \alpha)g(\xi) = 0$  の解 . . 2 2 8

A - 1. 級数解 . . . 2 2 8

A - 2. 解の性質 . . . 2 3 0

A - 3. 級数係数  $a_m, b_m$  の例 . . . 2 3 4

付 録 2 結合係数  $\lambda_{ii}, \lambda_{ij}$  について . . . 2 4 1

付 録 3 スプリット・ステップ法について . . . 2 4 5

## 第 1 章 ま え が き

低軌道周回衛星や移動通信衛星用として予定される S バンドなど近年需要の増した超高周波帯の電波は，大気の屈折率の影響を強く受け，ときとして異常伝搬現象を生じることから，対流圏伝搬に対するより厳しい評価が求められ始めている<sup>(1),(2)</sup>．レーダの発達とともに明らかにされたこの異常伝搬の一つに，地表面あるいは海面近くの大気中に屈折率の逆転が生じ，上層ダクト(elevated duct)，接地ダクト(surface-based duct)，エバポレーション・ダクト(evaporation duct)などが発生し，これらが電波に対し導波管のような役目をして電波を遠距離まで伝搬させる．このダクト伝搬によって生じるフェージング，つまり受信電界の時間変動や異常高電界による混信が通信回線の品質を劣化させる原因となる．従って，回線の設計上この異常伝搬による通信回線への影響を解明することは重要であり，戦後から今日に至るまで多くの実験結果が報告されている<sup>(3)~(12)</sup>．また，フェージングの観測調査<sup>(13),(14)</sup>や大気の屈折率とダクト発生の関係も調べられており<sup>(15)</sup>，屈折率分布の詳細な報告もある<sup>(5)</sup>．

このダクト伝搬に対する理論的解析も数多く行なわれており，遠距離見通し外に有効なモード理論としては，例えば Furry<sup>(16)</sup>は屈折率分布に bilinear モデルを用い，接地ダクト形大気だけでなく準標準形大気に対しても固有値を得ている．また，trilinear モデルを採用して実測との比較を行った Pappert ら<sup>(11)</sup>や Marcus<sup>(17)</sup>は上層ダクトの解析を試みている．これらはいずれも簡単な形状の屈折率分布で大気を近似しており，岡<sup>(18)</sup>は任意形状の屈折率分布を微小部分に分割する折れ線近似を提唱している．

波動方程式の解法の一つに W.K.B.法<sup>(19),(20)</sup>があり，後藤<sup>(21)</sup>，Gerks ら<sup>(23)</sup>，

Freehafer<sup>(22)</sup>は任意形状の屈折率分布をもつ大気での伝搬問題にこの方法を用いている。波動方程式が近接した2つ以上の転移点をもつ場合、WKB解を得るのは非常に困難であり、統一的に解析できない。また、複雑な屈折率分布をもつ場合、固有値導出時の煩雑さがともなう。

屈折率分布を既知関数で近似する方法もあり、指数関数形プロファイルを用いてJosephら<sup>(24)</sup>はフェージングについて検討している。また、山田<sup>(25)</sup>はWeber関数<sup>(26)</sup>の漸近展開形を用いて放物線形の屈折率分布大気について調べており、Gerks<sup>(27)</sup>はLanger近似<sup>(28)</sup>から得られるWhittaker関数<sup>(29)</sup>を用いてダクト伝搬を取り扱っている。しかし、既知関数の使用により屈折率分布はかなりの制約を受ける。

見通し内および見通し近傍に有効なダクト伝搬解析としては幾何光学理論、特にレイ・トレーシング解析が多用される。見通し内伝搬路に与えるダクト伝搬の影響の多くはフェージングの発生であり、屈折率分布が高さだけに依存するものとして多くの理論解析が報告されている<sup>(30),(31)</sup>。対流圏見通し内の伝搬特性の理論解析も多数行なわれており、例えばFruchtenicht<sup>(32)</sup>はダクト高と受信点との関係を調べている。また、屈折率分布が高さと距離方向に変動する不均一大気に対して岡<sup>(33)</sup>は伝搬路内の不均一気塊による伝搬特性への影響について論じている。

幾何光学論は任意の不均一大気の解析に有効である反面、焦線(caustic)近傍ならびに見通し外領域に適用できず、近年この幾何光学とモード理論を混合したハイブリッド理論が提案され、Felsen, 石原ら<sup>(34)~(39)</sup>により理論研究が進められている。

また、Keller<sup>(40)</sup>は幾何光学に回折波成分を含めその精度を向上させた幾何光学的回折理論(Geometrical theory of diffraction: GTD)を提唱している。これは導体による回折現象を幾何光学的に表現する高周波近似手法であり、幾何光学同様理解の容易さがある反面、焦線の問題は解決されない。但し、焦線での

幾何光学波の発散を解消した物理光学的回折理論(Physical theory of diffraction : PTD)も報告されている<sup>(41)</sup>.

ハイブリッド理論, GTD法およびPTD法の任意方向に不均一な大気内伝搬への応用は今後の問題である.

遠距離見通し外ダクト伝搬の理論的解析に対するモード理論の有効性は前述した通りであるが, 従来の屈折率分布モデルの多くは高さ方向だけに不均一な一次元問題として取扱われており, 実測値との不一致を指摘する報告もある<sup>(11)</sup>. 事実, カンタベリー・プロジェクト<sup>(5)</sup>の実測した大気の屈折率は多種多様な分布を示している.

不均一大気を高さと距離のような二次元問題に拡張しての解析を厳密に扱うことはできないが, Fockの提唱したパラボリック方程式<sup>(42)</sup>にFFTを適用して波源近傍から遠距離まで逐次受信電界を算出していくスプリット・ステップ・アルゴリズムが提案され<sup>(43),(44)</sup>, 対流圏伝搬への適用が試みられている<sup>(45)~(47)</sup>. 例えば, Dockery<sup>(46)</sup>は標準大気ならびに水平方向に均一な接地ダクトに対して検討を行っており, またKuttlerとDockery<sup>(48)</sup>はこの手法への理論的な検討を加え, Barrios<sup>(49)</sup>はカンタベリー・プロジェクトの実測結果<sup>(5)</sup>とスプリット・ステップ法からの伝搬特性との比較を行ない, 両者の良好な一致を確認している. 見通し内・外それぞれの領域に有効な幾何光学論ならびにモード理論と異なり, スプリット・ステップ法は逐次近似であり, 広域かつ実際の複雑な大気内での伝搬特性を知る有力な手法である. 但し, この手法では距離方向の不均一性から生ずる反射波や散乱波による多重反射を取り扱うことができない.

また, 高さと距離方向に不均一な大気モデルに対する解析方法として, モード理論にモード・マッチング法を適用した結合モード解析がある. ChoとWait<sup>(50)</sup>はわずかに異なる不均一大気を距離方向に接続し, 隣接境界面での伝送モード間の結合係数を無限積分の比で与え, これを用いて距離方向に不均一な大気内伝搬について解析した. 高さ方向の屈折率分布には trilinear モデルを用い, 下層大

気の厚さや逆転大気の屈折率傾度に対する伝搬特性の考察を行なった。また、このモード・マッチング法から得られる距離方向の解がWKB解に類似していることに着目し、Wait<sup>(51)</sup>は摂動法による結合係数の導出も試みている。Choらの大気モデルと同一の区間分割数を採用すると、伝搬特性はスプリット・ステップ法からのそれにほぼ一致するとの報告をKoら<sup>(52)</sup>は行なった。しかし、スプリット・ステップ数を増すと遠距離での下層大気内の受信電界レベルは互いに差異を生ずるようになり、このことは距離に対してChoらの分割数が少ない、つまり隣接大気の屈折率差が大きいことによると指摘している。また、Choらはダクト高や逆転大気の屈折率傾度の相異から生ずる伝送モードと結合係数との関係および結合係数間の諸性質について詳細な検討を行っていない。多数のモードが伝搬に寄与する場合、結合係数算出の煩雑さはあるが、結合モード解析は距離方向に不均一な大気を与える伝送モードへの影響、つまり不均一大気によるモード変換のメカニズムを知る上で有効な解析法である。

理論解析に採用されるダクト・モデルを大別すると、接地ダクトに対して bilinear プロファイル、上層ダクトには trilinear プロファイルの屈折率分布が多用される。しかし、大気の屈折率分布はカンタベリー・プロジェクトの観測結果<sup>(5)</sup>から知られるように、高度および距離いずれの方向にも変動し、多種多様な分布を示しており、筆者の知る限り修正屈折率傾度ゼロ付近の大気プロファイルを与える伝搬への影響についての理論的な解析は行なわれていない。

本論文では、逆転大気層付近のプロファイルに着目し、電波の伝搬への影響について考察する。取り扱いを容易にするために、Pryce<sup>(53)</sup>やPekeris<sup>(54)</sup>らによって導入された平面大地近似、つまり地表面を平面化しその代りに地球の曲率を考慮に入れて屈折率分布を修正する方法を採用する。

第2章では大気の屈折率分布が水平方向に均一な  $2n$  乗  $N$  プロファイル・モデル<sup>(55)</sup>、つまり標準大気下に高さに対して2乗、4乗、6乗のような偶数乗の逆転

大気層が存在し、最下層で再び線形分布を示すような大気分布を採用した。また、地表面の湾曲を考慮に入れて地表下の屈折率も線形とした。

高さに対して  $2n$  乗特性をもつ屈折率分布の場合、波動方程式の解が既知関数で与えられないことから、まず波動方程式の厳密解を級数表示で求めた<sup>(56)</sup>。この級数解は接近した2つの転移点をもつ場合でも有効であり、1 価関数で与えられることから取り扱いも容易である。次に各屈折率分布モデルでの解の接続から波動関数を導出し、モード理論を用いて解析を行った。

まず、モード方程式を解き、各モードを規定する固有値を  $2n$  乗  $N$  プロファイルの次数  $n$  毎に求め、その差異を比較し、各次数  $n$  についての高度分布を示した。さらに、ダクト高に対する極大電界高度および受信電界が次数  $n$  によって異なることを示し、各次数  $n$  に対する受信電界の空間分布を水平・垂直両偏波で与え、次数  $n$  による各種の変動特性について考察した。

また、接地ダクトやエバポレーション・ダクトの発生の多くは海上であり、局所的な発達・消滅やその移流により水平方向に不均一なダクトが形成される。第3章では、ダクト高が距離方向に対してゆるやかに変化する接地型ダクト・モデルを採用し、結合モード解析を用いて屈折率傾度ゼロ付近の  $N$  プロファイルの違いによる不均一大気内の隣接伝送モードの結合係数を有限積分で与え、結合係数間の関係を明らかにした。また、不均一ダクト内の伝搬特性に与える結合係数の影響を示した<sup>(57)</sup>。

ここではまず、相異なる不均一大気境界面に到来する反射波の導入でより厳密な結合係数の定式化を行ない、結合係数の特性について言及した。大気モデルとしては  $2n$  乗  $N$  プロファイル・モデル、つまり標準大気下に高さに対して  $2n$  乗特性をもつ逆転大気層が存在し、下層で再び線形となる屈折率分布を採用する。結合係数はわずかに異なる大気モデルでの高度分布関数の積を無限積分することで与えられるが、これを標準大気下の有限積分に変換し、しかも  $2n$  乗  $N$  プロファイル・モデルでの高度分布関数は解析解の接続で与えており、結合係数の算出を



容易にした。

次に、屈折率分布が距離とともに連続的に変化する不均一大気をステップ状の変化に置き換える階段近似の方法を用い、Choら<sup>(50)</sup>が取扱わなかった隣接大気面からの反射波も考慮に入れ、水平方向に不均一大気モデル全域での波動関数の精密化をはかった。この波動関数は水平・垂直両偏波に適用できる。

数値例としては、下層の深さが距離に対して増減する  $2n$  乗  $N$  プロファイル・モデルでの結合係数を示し、結合係数と伝送モードとの関係ならびに次数  $n$  による差異、特に  $2n$  乗  $N$  プロファイル・モデルと bilinear モデルとの結合係数のふるまいの違いを明らかにした。最後に、距離に対して均一、不均一、均一の3つの領域で構成される不均一ダクト・モデルに対して、隣接大気から得られた結合係数を用いて波動関数を逐次算出することにより大気モデル全域での伝搬特性の一例を示し、その結果を考察した。

なお、スプリット・ステップ法からの伝搬特性との比較も行なった。

## 第 2 章 2n 乗 N プロファイルをもつ 均一ダクト

### 2. 1 ヘルツ・ベクトル

磁荷ならびに磁流を考慮に入れると<sup>(\*)</sup>, Maxwell の方程式は

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{i}^m - j\omega\mu\mathbf{H} \quad (2-1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E} + \mathbf{i}^e \quad (2-1b)$$

$$\nabla \cdot \epsilon\mathbf{E} = \rho^e \quad (2-1c)$$

$$\nabla \cdot \mu\mathbf{H} = \rho^m \quad (2-1d)$$

で与えられる。但し、時間因子に  $\exp(j\omega t)$  を採用している。ここで、電流  $\mathbf{i}^e$  および電荷  $\rho^e$  から発生する電磁界  $\mathbf{E}^e$ ,  $\mathbf{H}^e$  と磁流  $\mathbf{i}^m$  および磁荷  $\rho^m$  からの電磁界

---

(\*) 電荷密度  $\rho^e$  に対して磁荷体積密度  $\rho^m$  を仮定して

$$\nabla \cdot \mathbf{B}^m = \rho^m$$

とすることがある。但し、 $\rho^m$  は実在しないから必要に応じて 0 とおけばよい。さらに、磁荷の流れとして磁流面密度  $\mathbf{i}^m$  を仮定し、次のように書く。

$$\nabla \times \mathbf{E}^m = -\mathbf{i}^m - \frac{\partial \mathbf{B}^m}{\partial t}$$

従って、磁荷体積密度  $\rho^m$  と磁流面密度  $\mathbf{i}^m$  との間には、上の 2 式から

$$\nabla \cdot \mathbf{i}^m = -\frac{\partial \rho^m}{\partial t}$$

が導かれる。なお、磁流に相当するものは電流ループにより実現できる。

$\mathbf{E}^m$ ,  $\mathbf{H}^m$ に分けて

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^m, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}^e + \mathbf{H}^m \quad (2-2)$$

とおくと、式(2-1)は

$$\nabla \times \mathbf{E}^e = -j\omega\mu\mathbf{H}^e \quad (2-3a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}^e = j\omega\varepsilon\mathbf{E}^e + \mathbf{i}^e \quad (2-3b)$$

$$\nabla \cdot \varepsilon\mathbf{E}^e = \rho^e \quad (2-3c)$$

$$\nabla \cdot \mu\mathbf{H}^e = 0 \quad (2-3d)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}^m = -\mathbf{i}^m - j\omega\mu\mathbf{H}^m \quad (2-4a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}^m = j\omega\varepsilon\mathbf{E}^m \quad (2-4b)$$

$$\nabla \cdot \varepsilon\mathbf{E}^m = 0 \quad (2-4c)$$

$$\nabla \cdot \mu\mathbf{H}^m = \rho^m \quad (2-4d)$$

の2組に分離できる。但し、式(2-3b)と(2-3c)また式(2-4a)と(2-4d)とより次の関係がある。

$$\rho^e = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{i}^e}{j\omega}, \quad \rho^m = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{i}^m}{j\omega} \quad (2-5)$$

### 2.1.1 電気型ヘルツ・ベクトル

通常の場合、透磁率は $\mu \cong \mu_0$ であり、式(2-3d)は $\nabla \cdot \mathbf{H}^e = 0$ となるから、磁界 $\mathbf{H}^e$ は

$$\mathbf{H}^e = j\omega\nabla \times \varepsilon\Pi^e \quad (2-6)$$

と新たなベクトル $\Pi^e$ で表すことができる。これを式(2-3a)に代入すると、

$$\nabla \times (\mathbf{E}^e - \omega^2\varepsilon\mu\Pi^e) = 0$$

が得られるから、電界 $\mathbf{E}^e$ は

$$\mathbf{E}^e = k^2\Pi^e + \nabla\phi^e \quad (2-7)$$

で与えられる。但し、 $\phi^e$ は任意のスカラーである。また、伝搬定数 $k$ は

$$k^2 = \omega^2\varepsilon\mu \quad (2-8)$$

である。

ところで、誘電率 $\varepsilon$ が場所に対してあまり急激な変動をせず、

$$\left| \frac{(\nabla \varepsilon / \varepsilon) \times \Pi^e}{\nabla \times \Pi^e} \right| \ll 1 \quad (2-9)$$

であるものとする、式(2-6)は

$$\mathbf{H}^e = j\omega \varepsilon \nabla \times \Pi^e \quad (2-6)'$$

と近似できる。ここで、上式と式(2-7)とを式(2-3b)に代入すると、

$$\nabla^2 \Pi^e + k^2 \Pi^e + \nabla(\phi^e - \nabla \cdot \Pi^e) = -\frac{\mathbf{i}^e}{j\omega \varepsilon} \quad (2-10)$$

が得られ、さらに

$$\phi^e = \nabla \cdot \Pi^e \quad (2-11)$$

とおくと、ベクトル $\Pi^e$ の満たすべき方程式(波動方程式)は

$$\nabla^2 \Pi^e + k^2 \Pi^e = -\frac{\mathbf{i}^e}{j\omega \varepsilon} \quad (2-10)'$$

となる。但し、 $\nabla^2$ は直交座標についての演算子である。なお、誘電率 $\varepsilon$ は

$$\left| \frac{(\nabla \varepsilon / \varepsilon) \times \nabla \times \Pi^e}{\nabla \times \nabla \times \Pi^e} \right| \ll 1 \quad (2-12)$$

の条件を満足するものとする。

以上より、電磁界 $\mathbf{E}^e$ 、 $\mathbf{H}^e$ は波動方程式(2-10)'を満たすヘルツ・ベクトル $\Pi^e$ で与えられ、

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^e &= \nabla \nabla \cdot \Pi^e + k^2 \Pi^e \\ \mathbf{H}^e &= j\omega \varepsilon \nabla \times \Pi^e \end{aligned} \quad (2-13)$$

となる。

ヘルツ・ベクトル $\Pi^e$ が $z$ 成分だけをもつ場合を考えることにし、直交座標表示で

$$\Pi^e = (0, 0, \psi^e) \quad (2-14)$$

とおくと，式(2-13)より電磁界成分 $\mathbf{E}^e$ ， $\mathbf{H}^e$ は

$$\mathbf{E}^e = \left( \frac{\partial^2 \psi^e}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 \psi^e}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 \psi^e}{\partial z^2} + k^2 \psi^e \right)$$

$$\mathbf{H}^e = j\omega \varepsilon \left( \frac{\partial \psi^e}{\partial y}, -\frac{\partial \psi^e}{\partial x}, 0 \right) \quad (2-15)$$

と表される．

### 2.1.2 磁気型ヘルツ・ベクトル

式(2-4c)を考慮に入れて

$$\mathbf{E}^m = -j\omega(\mu/\varepsilon)\nabla \times \varepsilon \Pi^m \quad (2-16)$$

とする．但し，式(2-9)と同様な条件

$$\left| \frac{(\nabla \varepsilon / \varepsilon) \times \Pi^m}{\nabla \times \Pi^m} \right| \ll 1 \quad (2-17)$$

のもとでは，電界 $\mathbf{E}^m$ は

$$\mathbf{E}^m = -j\omega \mu \nabla \times \Pi^m \quad (2-16)'$$

と近似できる．上式と式(2-4b)とから磁界 $\mathbf{H}^m$ は

$$\mathbf{H}^m = k^2 \Pi^m + \nabla \phi^m \quad (2-18)$$

で表すことができる．但し， $\phi^m$ は任意のスカラーである．式(2-16)'と(2-18)を式(2-4a)に代入して

$$\phi^m = \nabla \cdot \Pi^m \quad (2-19)$$

とすれば，ヘルツ・ベクトル $\Pi^m$ の満たすべき方程式は

$$\nabla^2 \Pi^m + k^2 \Pi^m = -\frac{\mathbf{i}^m}{j\omega \mu} \quad (2-20)$$

であり，電磁界 $\mathbf{E}^m$ ， $\mathbf{H}^m$ は $\Pi^m$ を用いて

$$\mathbf{E}^m = -j\omega \mu \nabla \times \Pi^m$$

$$\mathbf{H}^m = k^2 \mathbf{\Pi}^m + \nabla \nabla \cdot \mathbf{\Pi}^m \quad (2-21)$$

で与えられる.

ヘルツ・ベクトル  $\mathbf{\Pi}^m$  が  $z$  成分だけをもつ場合を考えることにし,

$$\mathbf{\Pi}^m = (0, 0, \psi^m) \quad (2-22)$$

とおくと, 式(2-21)より電磁界成分  $\mathbf{E}^m$ ,  $\mathbf{H}^m$  は

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^m &= -j\omega\mu \left( \frac{\partial \psi^m}{\partial y}, -\frac{\partial \psi^m}{\partial x}, 0 \right) \\ \mathbf{H}^m &= \left( \frac{\partial^2 \psi^m}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 \psi^m}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 \psi^m}{\partial z^2} + k^2 \psi^m \right) \end{aligned} \quad (2-23)$$

と表される.

## 2. 2 ヘルツ・ベクトルの 2 重フーリエ積分表示

波源は平面大地上の高さ  $z = z_1$  のところにある  $z$  方向のダイポールであるとする  
と, 波源の電流密度  $i^e$  ならびに磁流密度  $i^m$  は, Dirac の  $\delta$  関数を用いて,

$$\begin{aligned} i^e &= \mathbf{z} p^e \delta(x) \delta(y) \delta(z - z_1) \\ i^m &= \mathbf{z} p^m \delta(x) \delta(y) \delta(z - z_1) \end{aligned} \quad (2-24)$$

と表される. 但し,  $p^e$  および  $p^m$  はそれぞれ電気および磁気ダイポール・モーメントである. 従って,  $\mathbf{\Pi}^e$  および  $\mathbf{\Pi}^m$  は  $z$  成分だけを考えればよく, 2 重フーリエ積分を用いて  $\psi^e$  ならびに  $\psi^m$  を

$$\psi(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} u(z, \kappa) e^{j(\kappa_x x + \kappa_y y)} d\kappa_x d\kappa_y \quad (2-25)$$

また, その逆変換を

$$u(z, \kappa) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \psi(x, y, z) e^{-j(\kappa_x x + \kappa_y y)} dx dy \quad (2-26)$$

と書くことにする<sup>(58)</sup>。但し、

$$\kappa^2 = \kappa_x^2 + \kappa_y^2 \quad (2-27)$$

の関係がある。なお、 $\psi^e$ と $\psi^m$ との相異はダイポール・モーメントだけであり、以後ことわらない限り添字 $e, m$ は省略する。

これらの関係より方程式(2-10)', (2-20)はいずれも

$$[\nabla^2 + k^2(z)]\psi = 2\pi\Delta\delta(x)\delta(y)\delta(z-z_1) \quad (2-28)$$

となる。但し、 $\Delta$ は垂直電気および磁気ダイポールのそれぞれの場合に対して、

$$\Delta = \begin{cases} jp^e/2\pi\omega\epsilon \\ jp^m/2\pi\omega\mu \end{cases} \quad (2-29)$$

で与えられる。式(2-28)に式(2-25)を代入して

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \left[ -\xi^2 - \eta^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2(z) \right] u(z, \kappa) e^{j(\kappa_x x + \kappa_y y)} d\kappa_x d\kappa_y \\ = 2\pi\Delta\delta(x)\delta(y)\delta(z-z_1) \end{aligned}$$

従って、これを逆変換して

$$\left[ \frac{d^2}{dz^2} + k^2(z) - \kappa^2 \right] u(z, \kappa) = \Delta\delta(z-z_1) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-j\kappa_x x} dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) e^{-j\kappa_y y} dy$$

となる。つまり、

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + [k^2(z) - \kappa^2] u = \Delta\delta(z-z_1) \quad (2-30)$$

が得られる。上式を積分して知られるように、関数 $u(z, \kappa)$ は $z=z_1$ において連続であり、またその導関数は不連続となる。つまり

$$[u(z, \kappa)]_{z_1-0}^{z_1+0} = 0, \quad \left[ \frac{du}{dz} \right]_{z_1-0}^{z_1+0} = \Delta \quad (2-31)$$

であり、これが波源近傍での条件である。

ところで、波源は $z$ 軸上に置かれた垂直ダイポールであることから、 $z$ 軸に対して対称である。従って、ヘルツ・ベクトル $\boldsymbol{\Pi}$ の $z$ 成分 $\psi$ の2重積分表示は $z$ 軸を軸とする円筒座標表示に変換することができ、

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi_1, \quad y = r \sin \phi_1, \quad r^2 = x^2 + y^2 \\ \kappa_x &= \kappa \cos \phi_2, \quad \kappa_y = \kappa \sin \phi_2, \quad \kappa^2 = \kappa_x^2 + \kappa_y^2 \end{aligned} \quad (2-32)$$

とおくと、式(2-25)は

$$\begin{aligned} \psi(x, y, z) &= \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} u(z, \kappa) e^{j(\kappa_x x + \kappa_y y)} d\kappa_x d\kappa_y \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} u(z, \kappa) \kappa d\kappa \cdot \int_0^{2\pi} e^{j\kappa r \cos(\phi_2 - \phi_1)} d\phi_2 \\ &= \int_0^{\infty} J_0(\kappa r) u(z, \kappa) \kappa d\kappa \end{aligned} \quad (2-33)$$

と書き換えることができる。但し、上式は

$$\cos n\phi_1 J_n(\kappa r) = \frac{j^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{j\kappa r \cos(\phi_2 - \phi_1)} \cos n\phi_2 d\phi_2$$

の関係式を用いており<sup>(59)</sup>、また $J_0(\kappa r)$ は零次のベッセル関数である。

## 2. 3 境界条件と偏波

境界面上では電磁界の接線成分がいたるところ連続でなければならず、垂直電気ならびに磁気ダイポールのそれぞれの場合について考えることにする。

### 2. 3. 1 垂直電気ダイポール



電磁界成分 $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ は式(2-15)より

$$\mathbf{E} = \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi \right)$$

$$\mathbf{H} = j\omega \varepsilon \left( \frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x}, 0 \right) \quad (2-15)$$

と表される．また，ヘルツ・ベクトル $\mathbf{\Pi}$ を円筒座標 $(r, \theta, z)$ で表すと

$$\mathbf{\Pi} = (0, 0, \psi) \quad (2-34)$$

であるから，式(2-13)より電磁界成分は

$$E_r = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z}$$

$$E_z = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi \quad (2-35)$$

$$H_\theta = -j\omega \varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

となり，これは垂直偏波成分を表している．

従って，式(2-15)あるいは(2-35)より接線成分の連続の条件は

$$k^2 \psi, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad \text{の連続性} \quad (2-36)$$

となる．

### 2.3.2 垂直磁気ダイポール

式(2-23)を再記すると，電磁界成分 $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ は

$$\mathbf{E} = -j\omega \mu \left( \frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x}, 0 \right)$$

$$\mathbf{H} = \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi \right) \quad (2-23)$$

と表される。また、円筒座標表示での電磁界成分は、(2-21)より

$$E_\theta = j\omega\mu \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

$$H_r = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} \quad (2-37)$$

$$H_z = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi$$

となり、これは水平偏波である。従って、接線成分の連続の条件は

$$\psi, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad \text{の連続性} \quad (2-38)$$

となる。

以上より、垂直・水平それぞれの偏波は電気および磁気の垂直ダイポールからの放射によって与えられることになり、式(2-29)を

$$\Delta = \begin{cases} \Delta_v = jp^e/2\pi\omega\epsilon \\ \Delta_h = jp^m/2\pi\omega\mu \end{cases} \quad (2-29)'$$

と書き換えておく。但し、添字 $v, h$ はそれぞれ電気型および磁気型ヘルツ・ベクトルから得られる偏波、つまり垂直および水平偏波の場合に対応する。

## 2. 4 波 動 関 数

高さに対して屈折率が変動している不均一大気を考える。先に述べたように、地表面が $xy$ 面に平行となる直交座標を採用することにし、送受信点の座標をそれぞれ $(0, 0, z_1)$ ,  $(x, y, z)$ , 両者間の地表距離を $r(=\sqrt{x^2+y^2})$ とする。波源は $z$ 軸

方向の電気および磁気の微小ダイポールを選ぶ．不均一大気は3層大気からなるものとし，その境界面を $z=z_s$ および $z=-z_d$ とする．また，大気と地表との境界面を $z=-z_e$ とし，この境界面上での大気および地表の伝搬定数をそれぞれ $k_{01}$ および $k_1$ とする．電気型および磁気型ヘルツ・ベクトルの $z$ 成分 $\psi$ （波動関数）としては式(2-33)，つまり

$$\psi(r, z) = \int_0^\infty J_0(\kappa r) u(z, \kappa) \kappa d\kappa \quad (2-33)$$

を採用する．但し，積分(2-33)の被積分関数 $u(z, \kappa)$ は波動方程式

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + [k^2 N^2(z) - \kappa^2] u = 0 \quad (2-39)$$

の解である．但し， $N(z)$ は地球表面の湾曲を考慮に入れることで導入される大気の修正屈折率である<sup>(53), (54)</sup>．波源が配置される上層，中層および下層大気のそれぞれの領域によって $u(z, \kappa)$ の表示式は異なることから，各領域での高度分布関数 $u(z, \kappa)$ を以下に示す．

i)  $z_1 \geq z_s$  の場合

各領域での分布関数 $u(z, \kappa)$ を

$$\begin{aligned} u(z, \kappa) &= A_2 u_2(z, \kappa), & (z \geq z_1) \\ &= B_1 u_1(z, \kappa) + B_2 u_2(z, \kappa), & (z_1 \geq z \geq z_s) \\ &= C_1 v_1(z, \kappa) + C_2 v_2(z, \kappa), & (z_s \geq z \geq -z_d) \\ &= D_1 w_1(z, \kappa) + D_2 w_2(z, \kappa), & (-z_d \geq z \geq -z_e) \\ &= E_1 v_1(z, \kappa), & (-z_e \geq z) \end{aligned} \quad (2-40)$$

とする．但し，上式の分布関数 $u_i(z, \kappa), v_i(z, \kappa), w_i(z, \kappa), v_i(z, \kappa), (i=1, 2)$ はいずれも添字 $i=1$ の場合 $-z$ 方向， $i=2$ の場合 $+z$ 方向の進行波を表すものとする．また， $A_2, B_1, B_2, \dots, E_1$ は境界条件より決まる定数であり，境界条件(2-31)，(2-36)，(2-38)を用いて分布関数 $u(z, \kappa)$ を求めると，次の通りである．

$$\begin{aligned}
u(z, \kappa) &= \frac{\Delta G_0}{W_{01}} \cdot \frac{\langle u_1(z_1) u_2'(z_s) \rangle - p \langle u_1(z_1) u_2(z_s) \rangle}{u_2(z_1)} \cdot u_2(z) , & (z \geq z_1) \\
&= \frac{\Delta G_0}{W_{01}} \cdot \left\{ \langle u_1(z) u_2'(z_s) \rangle - p \langle u_1(z) u_2(z_s) \rangle \right\} , & (z_1 \geq z \geq z_s) \\
&= \frac{\Delta W_{02} G_0}{W_{01} W_{03}} \cdot \left\{ \langle v_1(z) v_2'(z_s) \rangle - p \langle v_1(z) v_2(z_s) \rangle \right\} , & (z_s \geq z \geq -z_d) \\
&= \frac{\Delta W_{02} W_{05} G_0}{W_{01} W_{06}} \cdot \frac{\langle w_1(z) w_2'(-z_d) \rangle - q \langle w_1(z) w_2(-z_d) \rangle}{\langle v_1(z_s) v_2'(-z_d) \rangle - q \langle v_1(z_s) v_2(-z_d) \rangle} , & (-z_d \geq z \geq -z_e)
\end{aligned} \tag{2-41}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\Delta W_{02} W_{05} W_{08} G_0}{W_{01} v_1(-z_e)} \cdot \frac{v_1(z)}{\langle v_1(z_s) v_2'(-z_d) \rangle - q \langle v_1(z_s) v_2(-z_d) \rangle} \\
&\quad \cdot \frac{1}{\langle w_1(-z_d) w_2'(-z_e) \rangle - K \langle w_1(-z_d) w_2(-z_e) \rangle} , & (-z_e \geq z)
\end{aligned}$$

但し,

$$\begin{aligned}
G_0 &= \frac{u_2(z_1)}{u_2'(z_s) - p u_2(z_s)} \\
p &= \frac{\langle v_1'(z_s) v_2'(-z_d) \rangle - q \langle v_1'(z_s) v_2(-z_d) \rangle}{\langle v_1(z_s) v_2'(-z_d) \rangle - q \langle v_1(z_s) v_2(-z_d) \rangle} \\
q &= \frac{\langle w_1'(-z_d) w_2'(-z_e) \rangle - K \langle w_1'(-z_d) w_2(-z_e) \rangle}{\langle w_1(-z_d) w_2'(-z_e) \rangle - K \langle w_1(-z_d) w_2(-z_e) \rangle} \\
K &= K_{01} \frac{v_1'(-z_e)}{v_1(-z_e)} , \quad K_{01} = \begin{cases} k_{01}^2 / k_1^2 , & (\text{垂直偏波}) \\ 1 , & (\text{水平偏波}) \end{cases} \tag{2-42}
\end{aligned}$$

であり,  $W_{0j}$ , ( $j=1, 2, 3, 5, 6, 8$ )はいずれも Wronskian, つまり

$$\begin{aligned}
W_{01} &= u_1(z_1)u_2'(z_1) - u_2(z_1)u_1'(z_1) \\
W_{02} &= u_1(z_s)u_2'(z_s) - u_2(z_s)u_1'(z_s) \\
W_{03} &= v_1(z_s)v_2'(z_s) - v_2(z_s)v_1'(z_s) \\
W_{05} &= v_1(-z_d)v_2'(-z_d) - v_2(-z_d)v_1'(-z_d) \\
W_{06} &= w_1(-z_d)w_2'(-z_d) - w_2(-z_d)w_1'(-z_d) \\
W_{08} &= w_1(-z_e)w_2'(-z_e) - w_2(-z_e)w_1'(-z_e)
\end{aligned} \tag{2-43}$$

である．ここに，表現を簡単にするため

$$\begin{aligned}
\langle a_i b_j \rangle &\equiv a_i b_j - a_j b_i \\
\langle a_i b_j' \rangle &\equiv a_i b_j' - a_j b_i' \\
\langle a_i' b_j \rangle &\equiv a_i' b_j - a_j' b_i \\
\langle a_i' b_j' \rangle &\equiv a_i' b_j' - a_j' b_i' , \quad (i, j = 1, 2)
\end{aligned} \tag{2-44}$$

の演算記号 $\langle \rangle$ を導入している．またプライムは各変数での導関数を表す．

なお，大気と地表との2層モデルの場合を考えると， $z_e = z_d = z_s = 0$ とし， $v_j \rightarrow u_j$ ならびに $w_j \rightarrow u_j$ ， $(j=1, 2)$ とおくことにより分布関数 $u(z, \kappa)$ は

$$\begin{aligned}
u(z, \kappa) &= \frac{\Delta}{W_{01}} \left[ \frac{u_1(z_1)}{u_2(z_1)} - \frac{u_1'(0) - K u_1(0)}{u_2'(0) - K u_2(0)} \right] u_2(z_1) u_2(z) , \quad (z \geq z_1) \\
&= \frac{\Delta}{W_{01}} \left[ \frac{u_1(z)}{u_2(z)} - \frac{u_1'(0) - K u_1(0)}{u_2'(0) - K u_2(0)} \right] u_2(z_1) u_2(z) , \quad (z_1 \geq z \geq 0) \tag{2-45} \\
&= \frac{\Delta W_{02}}{W_{01}} \cdot \frac{v_1(z)}{v_1(-z_e)} \cdot \frac{u_2(z_1)}{u_2'(0) - K u_2(0)} , \quad (0 \geq z)
\end{aligned}$$

で与えられる．

ii)  $z_s \geq z_1 \geq -z_d$  の場合

$$u(z, \kappa) = \frac{\Delta}{W_{04}} \cdot \frac{p \langle v_1(z_s) v_2(z_1) \rangle - \langle v_1'(z_s) v_2(z_1) \rangle}{u_2'(z_s) - p u_2(z_s)} \cdot u_2(z) , \quad (z \geq z_s)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\Delta G_1}{W_{04}} \left\{ \langle v_1(z) v_2'(-z_d) \rangle - q \langle v_1(z) v_2(-z_d) \rangle \right\} \\
&\quad - \frac{\Delta}{W_{04}} \langle v_1(z) v_2(z_1) \rangle, \quad (z_s \geq z \geq z_1) \quad (2-46) \\
&= \frac{\Delta G_1}{W_{04}} \left\{ \langle v_1(z) v_2'(-z_d) \rangle - q \langle v_1(z) v_2(-z_d) \rangle \right\}, \quad (z_1 \geq z \geq -z_d) \\
&= \frac{\Delta W_{05} G_1}{W_{04} W_{06}} \left\{ \langle w_1(z) w_2'(-z_d) \rangle - q \langle w_1(z) w_2(-z_d) \rangle \right\}, \quad (-z_d \geq z \geq -z_e) \\
&= \frac{\Delta W_{05} W_{08} G_1}{W_{04}} \cdot \frac{v_1(z)}{v_1(-z_e)} \\
&\quad \cdot \frac{1}{\langle w_1(-z_d) w_2'(-z_e) \rangle - K \langle w_1(-z_d) w_2(-z_e) \rangle}, \quad (-z_e \geq z)
\end{aligned}$$

但し,

$$\begin{aligned}
G_1 &= \frac{u_2'(z_s) \langle v_1(z_s) v_2(z_1) \rangle - u_2(z_s) \langle v_1'(z_s) v_2(z_1) \rangle}{\left\{ \langle v_1(z_s) v_2'(-z_d) \rangle - q \langle v_1(z_s) v_2(-z_d) \rangle \right\} \left\{ u_2'(z_s) - p u_2(z_s) \right\}} \\
W_{04} &= v_1(z_1) v_2'(z_1) - v_2(z_1) v_1'(z_1) \quad (2-47)
\end{aligned}$$

iii)  $-z_d \geq z_1 \geq -z_e$  の場合

$$\begin{aligned}
u(z, \kappa) &= \Delta W_{03} W_{06} G_2 u_2(z), \quad (z \geq z_s) \\
&= \Delta W_{06} G_2 \left\{ u_2'(z_s) \langle v_1(z_s) v_2(z) \rangle - u_2(z_s) \langle v_1'(z_s) v_2(z) \rangle \right\}, \quad (z_s \geq z \geq -z_d) \\
&= \Delta G_2 \langle w_1(z) w_2'(-z_d) \rangle \cdot \left\{ u_2'(z_s) \langle v_1(z_s) v_2(-z_d) \rangle - u_2(z_s) \langle v_1'(z_s) v_2(-z_d) \rangle \right\} \\
&\quad - \Delta G_2 \langle w_1(z) w_2(-z_d) \rangle \cdot \left\{ u_2'(z_s) \langle v_1(z_s) v_2'(-z_d) \rangle - u_2(z_s) \langle v_1'(z_s) v_2'(-z_d) \rangle \right\},
\end{aligned}$$

$$(-z_d \geq z \geq z_1) \quad (2-48)$$

$$\begin{aligned}
&= \Delta G_2 \langle w_1(z) w_2'(-z_d) \rangle \cdot \left\{ u_2'(z_s) \langle v_1(z_s) v_2(-z_d) \rangle - u_2(z_s) \langle v_1'(z_s) v_2(-z_d) \rangle \right\} \\
&\quad - \Delta G_2 \langle w_1(z) w_2(-z_d) \rangle \cdot \left\{ u_2'(z_s) \langle v_1(z_s) v_2'(-z_d) \rangle - u_2(z_s) \langle v_1'(z_s) v_2'(-z_d) \rangle \right\} \\
&\quad + \frac{\Delta}{W_{07}} \langle w_1(z) w_2(z_1) \rangle, \quad (z_1 \geq z \geq -z_e) \\
&= \frac{\Delta G_2 v_1(z)}{v_1(-z_e)} \langle w_1'(-z_d) w_2(-z_e) \rangle \\
&\quad \cdot \left\{ u_2'(z_s) \langle v_1(z_s) v_2(-z_d) \rangle + u_2(z_s) \langle v_1'(z_s) v_2(-z_d) \rangle \right\} \\
&\quad - \frac{\Delta G_2 v_1(z)}{v_1(-z_e)} \langle w_1(-z_d) w_2(-z_e) \rangle \\
&\quad \cdot \left\{ u_2'(z_s) \langle v_1(z_s) v_2'(-z_d) \rangle + u_2(z_s) \langle v_1'(z_s) v_2'(-z_d) \rangle \right\} \\
&\quad + \frac{\Delta v_1(z)}{W_{07} v_1(-z_e)} \langle w_1(-z_e) w_2(z_1) \rangle, \quad (-z_e \geq z)
\end{aligned}$$

但し,

$$\begin{aligned}
G_2 &= \frac{1}{W_{06} W_{07}} \cdot \frac{\langle w_1(z_1) w_1'(-z_d) \rangle - q \langle w_1(z_1) w_1(-z_d) \rangle}{\langle v_1(z_s) v_2'(-z_d) \rangle - q \langle v_1(z_s) v_2(-z_d) \rangle} \cdot \frac{1}{u_2'(z_s) - p u_2(z_s)} \\
W_{07} &= w_1(z_1) w_2'(z_1) - w_2(z_1) w_1'(z_1) \quad (2-49)
\end{aligned}$$

## 2. 5 積 分 の 評 価

積分(2-33)を変形するために, ベッセル関数の関係式

$$J_0(\kappa r) = \frac{1}{2} \left[ H_0^{(2)}(\kappa r) - H_0^{(2)}(-\kappa r) \right]$$

を用いると

$$\begin{aligned}
\psi(r, z) &= -\frac{1}{2} \int_0^\infty H_0^{(2)}(-\kappa r) u(z, \kappa) \kappa d\kappa + \frac{1}{2} \int_0^\infty H_0^{(2)}(\kappa r) u(z, \kappa) \kappa d\kappa \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty H_0^{(2)}(\kappa r) u(z, \kappa) \kappa d\kappa
\end{aligned} \tag{2-50}$$

となる。但し、 $u(z, \kappa)$ は $\kappa$ に関して偶関数であることを利用している。また、積分路は実軸であるが、ハンケル関数の $\kappa=0$ での分岐点を避けるため、原点で下方にindentするものとする。さらに、 $u(z, \kappa)$ は第3象限内に特異点をもたないので式(2-50)の積分路のうち負の実軸に沿う積分路は $-j\infty$ から0に向かう負の虚軸上の積分路に置き換えることができ、従って $\kappa$ 平面の第4象限に4分の1円を補うことにより複素積分を行うと、

$$\psi(r, z) = -2\pi j \sum \text{residues} + \int_B \tag{2-51}$$

となる。但し、 $\sum$ は第4象限内にあるすべての極での留数和であり、積分項は分岐線に沿う積分である。しかし、第4象限内の分岐点が極めて大きな虚部をもつものとすれば、積分項の $\psi(r, z)$ への寄与は留数項に比べて無視することができ、 $\psi(r, z)$ は次のようになる。

$$\psi(r, z) = -\frac{j\pi\Delta W_{02}}{W_{01}} \sum_{\kappa_m} \frac{\kappa_m H_0^{(2)}(\kappa_m r) V(z, \kappa_m) V(z_1, \kappa_m)}{u_2(z_s, \kappa_m) \frac{\partial}{\partial \kappa} [u_2'(z_s) - pu_2(z_s)]_{\kappa=\kappa_m}} \tag{2-52}$$

但し、高度分布関数 $V(z, \kappa)$ は

$$V(z, \kappa) = u_2(z) , \tag{z \geq z_s}$$

$$= \frac{1}{W_{03}} \left\{ u_2(z_s) \langle v_1(z) v_2'(z_s) \rangle - u_2'(z_s) \langle v_1(z) v_2(z_s) \rangle \right\} , \tag{z_s \geq z \geq -z_d}$$

$$= \frac{1}{W_{03} W_{06}} \langle w_1(z) w_2(-z_d) \rangle \cdot \left\{ u_2(z_s) \langle v_1'(z_s) v_2'(-z_d) \rangle - u_2'(z_s) \langle v_1(z_s) v_2'(-z_d) \rangle \right\}$$



$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{W_{03}W_{06}} \langle w_1(z)w_2'(-z_d) \rangle \cdot \left\{ u_2(z_s) \langle v_1'(z_s)v_2(-z_d) \rangle - u_2'(z_s) \langle v_1(z_s)v_2(-z_d) \rangle \right\} , \\
& \hspace{25em} (-z_d \geq z \geq -z_e) \quad (2-53) \\
& = \frac{-v_1(z)}{W_{03}W_{06}v_1(-z_e)} \langle w_1(-z_d)w_2(-z_e) \rangle \\
& \quad \cdot \left\{ u_2(z_s) \langle v_1'(z_s)v_2'(-z_d) \rangle - u_2'(z_s) \langle v_1(z_s)v_2'(-z_d) \rangle \right\} \\
& \quad + \frac{v_1(z)}{W_{03}W_{06}v_1(-z_e)} \langle w_1'(-z_d)w_2(-z_e) \rangle \\
& \quad \cdot \left\{ u_2(z_s) \langle v_1'(z_s)v_2(-z_d) \rangle - u_2'(z_s) \langle v_1(z_s)v_2(-z_d) \rangle \right\} , \\
& \hspace{25em} (-z_e \geq z)
\end{aligned}$$

であり，波源での分布関数  $V(z_1, \kappa)$  は上式を  $z=z_1$  として得られる．また，モード方程式

$$u_2'(z_s, \kappa) - p u_2(z_s, \kappa) = 0 \quad (2-54)$$

の根を  $\kappa_m$  としている．

なお，大気と地表面とからなる 2 層媒質の場合には， $z_s \rightarrow 0$  とすることで  $\psi(r, z)$  は得られる．但し，分布関数  $V(z, \kappa)$  は

$$\begin{aligned}
V(z, \kappa) &= u_2(z, \kappa) , & (z \geq 0) \\
&= \frac{v_1(z)}{v_1(-z_e)} u_2(0, \kappa) , & (z \leq 0)
\end{aligned} \quad (2-55)$$

となる．

## 2. 6 2 n 乗 N プロファイル・モデル

1 次元の波動方程式(2-39)を再記すると

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + [k^2 N^2(z) - \kappa^2] u = 0 \quad (2-39)$$

である．ここで、 $N^2(z) \approx 1$ を考慮に入れて

$$N^2(z) = 1 + y(z) \quad (2-56)$$

とおくと、方程式(2-39)は

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + k^2 [\lambda + y(z)] u = 0, \quad \lambda = 1 - \frac{\kappa^2}{k^2} \quad (2-57)$$

と変形できる．

次に、屈折率分布 $y(z)$ が上層で標準大気、中層で $2n$ 乗のプロファイルをもち、下層で再び線形分布を示すような大気、すなわち図2-1に示すような大気を考えることにすると、各層での屈折率分布 $y(z)$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} y(z) &= 2\gamma_0 \left( z - \frac{2n-1}{2n} z_s \right), & (z \geq z_s) \\ &= \frac{\gamma_0 z^{2n}}{n z_s^{2n-1}}, & (z_s \geq z \geq -z_d) \\ &= 2\gamma_0 \alpha^3 \left( z + \frac{2n-1}{2n} z_d \right), & (-z_d \geq z \geq -z_e) \\ &= \left( \frac{k_1}{k_0} \right)^2 - 1 + 2\gamma_0 \left( \frac{k_1}{k_0} \right)^2 (z + z_e), & (-z_e \geq z) \end{aligned} \quad (2-58)$$

となる．但し、

$$\begin{aligned} \alpha^3 &= - \left( \frac{z_d}{z_s} \right)^{2n-1} \\ kN(0) &= k_0 \end{aligned} \quad (2-59)$$

とおいてある．また、 $\gamma_0 (= 1.18 \cdot 10^{-7} \text{m}^{-1})$ は標準大気の修正屈折率傾度である．なお、図2-1は中層の次数 $n$ による相異の一例として $n=1, 4$ の場合を示した．

微分方程式(2-57)の取扱いを容易にするために、変数変換

$$\eta = \frac{z}{H}, \quad s = k_0^2 H^2 \lambda, \quad H = \left( 2\gamma_0 k_0^2 \right)^{-1/3} \quad (2-60)$$

を施すと、方程式(2-57)は

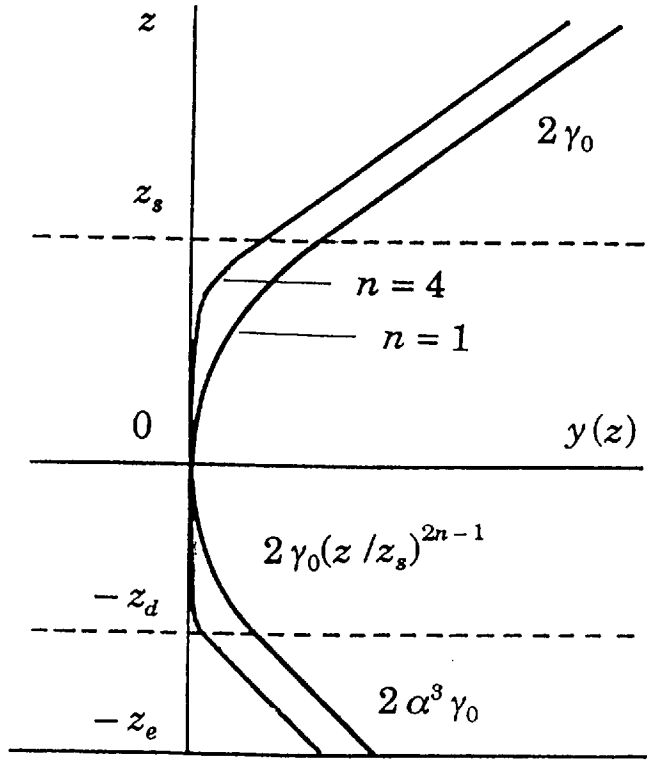


図2-1 屈折率分布

$$\frac{d^2 U(\eta)}{d\eta^2} + [K(\eta) + s] U(\eta) = 0 \quad (2-61)$$

となる．修正屈折率 $N^2(z)$ と屈折率 $K(\eta)$ との間には

$$N^2(z) = 1 + 2\gamma_0 HK(\eta) \quad (2-62)$$

の関係があり，上層，中層，下層および地表下の屈折率分布 $K(\eta)$ はそれぞれ

$$K(\eta) = \eta - \frac{2n-1}{2n} \eta_s, \quad (\eta \geq \eta_s) \quad (2-63a)$$

$$= \frac{\eta^{2n}}{2n\eta_s^{2n-1}}, \quad (\eta_s \geq \eta \geq -\eta_d) \quad (2-63b)$$

$$= \alpha^3 \left\{ \eta + \frac{2n-1}{2n} \eta_d \right\}, \quad (-\eta_d \geq \eta \geq -\eta_e) \quad (2-63c)$$

$$= K_1 + \left( \frac{k_1}{k_0} \right)^2 (\eta + \eta_e), \quad (-\eta_e \geq \eta) \quad (2-63d)$$

となる．ここに，

$$\eta_s = \frac{z_s}{H}, \quad \eta_d = \frac{z_d}{H}, \quad \eta_e = \frac{z_e}{H}$$

$$\alpha^3 = -\left(\frac{\eta_d}{\eta_s}\right)^{2n-1}, \quad K_1 = H^2(k_1^2 - k_0^2) \quad (2-64)$$

とにおいてある．

上層，下層および地表下の $K(\eta)$ は高さ $\eta$ の1次関数であることから方程式(2-61)の解 $U^j(\eta, s)$ , ( $j=1, 2$ )は Airy 関数<sup>(60), (61)</sup>あるいは1/3次の修正ハンケル関数 $h_j(\xi)$ で与えられるが，ここでは便宜上第1種，第2種の1/3次の修正ハンケル関数 $h_j(\xi)$

$$h_j(\xi) \equiv \left(\frac{2\xi^{3/2}}{3}\right)^{\frac{1}{3}} H_{1/3}^{(j)}\left(\frac{2\xi^{3/2}}{3}\right) \quad (2-65)$$

を採用することによると<sup>(62), (63)</sup>，独立解 $U^j(\eta, s)$ はそれぞれ

$$U^j(\eta, s) = h_j\{\tau(\eta, s)\}, \quad (\eta \geq \eta_s) \quad (2-66a)$$

$$= h_j\{\chi(\eta, s)\}, \quad (-\eta_d \geq \eta \geq -\eta_e) \quad (2-66b)$$

$$= h_1\{v(\eta, s)\}, \quad (-\eta_e \geq \eta) \quad (2-66c)$$

と与えられる．ここに，

$$\tau(\eta, s) = \eta - \frac{2n-1}{2n} \eta_s + s$$

$$\chi(\eta, s) = \alpha \left\{ \eta + \frac{2n-1}{2n} \eta_d \right\} + \frac{s}{\alpha^2} \quad (2-67)$$

$$v(\eta, s) = \beta_1^2 (K_1 + s) + \frac{\eta + \eta_e}{\beta_1}$$

$$\beta_1 = \left(\frac{k_0}{k_1}\right)^{\frac{2}{3}}$$

とにおいてある．なお，時間因子 $\exp(j\omega t)$ を採用しており，このとき $h_2(\xi)$ は $+\xi$ 方向， $h_1(\xi)$ は $-\xi$ 方向の進行波を表す．

また，微分方程式

$$\frac{d^2 g(\xi)}{d\xi^2} + (\xi^{2n} + s)g(\xi) = 0 \quad (2-68)$$

の解を $g_j(\xi, s)$ とすると、中層における微分方程式(2-61)の解は

$$U^j(\eta, s) = g_j(\xi, \beta_0^2 s), \quad (\eta_s \geq \eta \geq -\eta_d) \quad (2-69)$$

と表すことができる【付録1】。但し、

$$\xi = \frac{\eta}{\beta_0}, \quad \beta_0 = (2n\eta_s^{2n-1})^{\frac{1}{2(n+1)}} \quad (2-70)$$

である。

波動関数(2-50)は変数変換(2-60)により

$$\psi(r, \eta) = -\frac{1}{4H^2} \int_C H_0^{(2)}(k_0 r \sqrt{1-2\gamma_0 Hs}) u(\eta, s) ds \quad (2-71)$$

となる。積分路Cはs平面において実軸のわずか上方を $+\infty$ から $-\infty$ に行く積分路

である。ここで、 $k_0 r \gg 1$ の遠方を考えることにし、しかも $1 \gg 2\gamma_0 H|s|$ の場合、

上式のハンケル関数 $H_0^{(2)}(k_0 r \sqrt{1-2\gamma_0 Hs})$ の漸近展開形

$$H_0^{(2)}(k_0 r \sqrt{1-2\gamma_0 Hs}) = \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}} e^{j(\frac{\pi}{4} - k_0 r + \gamma_0 H s k_0 r)} \quad (2-72)$$

を用いて式(2-71)を書き換えると、波動関数 $\psi$ は

$$\psi(R, \eta) = -\sqrt{\frac{R}{\pi}} \cdot \frac{e^{j(\frac{\pi}{4} - k_0 r)}}{2Hr} \int_C e^{jRs} u(\eta, s) ds \quad (2-73)$$

となる。但し、距離 $r$ を正規化し

$$R = \frac{r}{L}, \quad L = 2k_0 H^2 \quad (2-74)$$

としている。また、上層、中層、下層および地表下の各領域での高度分布関数

$u(\eta, s)$ は以下の通りである。

i)  $\eta_1 \geq \eta_s$  の場合

波源が上層大気内にある場合の高度分布関数 $u(\eta, s)$ は

$$\begin{aligned}
u(\eta, s) &= \frac{\Delta H}{W_1 f_0(s)} \left[ \beta_0 A \langle h_1(\tau_1) h_2'(\tau_s) \rangle - B \langle h_1(\tau_1) h_2(\tau_s) \rangle \right] h_2\{\tau(\eta)\}, \quad (\eta \geq \eta_1) \\
&= \frac{\Delta H}{W_1 f_0(s)} \left[ \beta_0 A \langle h_1\{\tau(\eta)\} h_2'(\tau_s) \rangle - B \langle h_1\{\tau(\eta)\} h_2(\tau_s) \rangle \right] h_2(\tau_1), \\
&\quad (\eta_1 \geq \eta \geq \eta_s) \\
&= \frac{\Delta \beta_0 W_2 H}{W_1 W_3 f_0(s)} \left[ A \langle g_1(\zeta) g_2'(\zeta_s) \rangle - B \langle g_1(\zeta) g_2(\zeta_s) \rangle \right] h_2(\tau_1), \quad (\eta_s \geq \eta \geq -\eta_d) \\
&= \frac{\Delta \beta_0 W_2 W_5 H}{W_1 W_6 f_0(s)} h_2(\tau_1) I_1(\eta, s), \quad (-\eta_d \geq \eta \geq -\eta_e) \quad (2-75) \\
&= \frac{\Delta \alpha \beta_0 W_2 W_5 W_8 H h_2(\tau_1)}{W_1 K_0 f_0(s)} \cdot \frac{h_1\{\nu(\eta)\}}{h_1\{\nu(-\eta_e)\}}, \quad (-\eta_e \geq \eta)
\end{aligned}$$

である。ここに,

$$\begin{aligned}
f_0(s) &= \beta_0 A(s) h_2'(\tau_s) - B(s) h_2(\tau_s) \\
I_1(\eta, s) &= \frac{\alpha I_{1v}(\eta, s)}{K_0} - I_{1h}(\eta, s) \quad (2-76) \\
I_{1v}(\eta, s) &= Q_3 \langle h_1\{\chi(\eta)\} h_2'(\chi_d) \rangle - Q_4 \langle h_1\{\chi(\eta)\} h_2(\chi_d) \rangle \\
I_{1h}(\eta, s) &= Q_1 \langle h_1\{\chi(\eta)\} h_2'(\chi_d) \rangle - Q_2 \langle h_1\{\chi(\eta)\} h_2(\chi_d) \rangle
\end{aligned}$$

とおいてある。但し,

$$\begin{aligned}
A(s) &= \frac{\alpha A_v(s)}{K_0} - A_h(s) \\
B(s) &= \frac{\alpha B_v(s)}{K_0} - B_h(s) \\
A_v(s) &= F_3(s) Q_3(s) - \alpha \beta_0 F_1(s) Q_4(s) \\
B_v(s) &= F_4(s) Q_3(s) - \alpha \beta_0 F_2(s) Q_4(s) \\
A_h(s) &= F_3(s) Q_1(s) - \alpha \beta_0 F_1(s) Q_2(s) \\
B_h(s) &= F_4(s) Q_1(s) - \alpha \beta_0 F_2(s) Q_2(s) \\
F_1(s) &= \langle g_1(\zeta_s) g_2(\zeta_d) \rangle \\
F_2(s) &= \langle g_1'(\zeta_s) g_2(\zeta_d) \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_3(s) &= \langle g_1(\zeta_s) g_2'(\zeta_d) \rangle \\
F_4(s) &= \langle g_1'(\zeta_s) g_2'(\zeta_d) \rangle \\
Q_1(s) &= \langle h_1(\chi_d) h_2(\chi_e) \rangle \\
Q_2(s) &= \langle h_1'(\chi_d) h_2(\chi_e) \rangle \\
Q_3(s) &= \langle h_1(\chi_d) h_2'(\chi_e) \rangle \\
Q_4(s) &= \langle h_1'(\chi_d) h_2'(\chi_e) \rangle \\
\tau_1 &= \tau(\eta_1) , \quad \eta_1 = \frac{z_1}{H} , \quad \tau_s = \tau(\eta_s) \\
\zeta_1 &= \frac{\eta_1}{\beta_0} , \quad \zeta_s = \frac{\eta_s}{\beta_0} , \quad \zeta_d = -\frac{\eta_d}{\beta_0} \\
\chi_1 &= \chi(\eta_1) , \quad \chi_d = \chi(-\eta_d) , \quad \chi_e = \chi(-\eta_e) \\
K_0 &= jK_{01}\sqrt{K_1 + s}
\end{aligned} \tag{2-77}$$

である．上式では関数  $g(\zeta, \beta_0^2 s)$  に含まれる変数  $\beta_0^2 s$  を省略しており，以後もこれに従う．また， $W_j, (j=1, 2, 3, 5, 6, 8)$  は Wronskian

$$\begin{aligned}
W_1 &= \langle h_1(\tau_1) h_2'(\tau_1) \rangle \\
W_2 &= \langle h_1(\tau_s) h_2'(\tau_s) \rangle \\
W_3 &= \langle g_1(\zeta_s) g_2'(\zeta_s) \rangle \\
W_5 &= \langle g_1(\zeta_d) g_2'(\zeta_d) \rangle \\
W_6 &= \langle h_1(\chi_d) h_2'(\chi_d) \rangle \\
W_8 &= \langle h_1(\chi_e) h_2'(\chi_e) \rangle
\end{aligned} \tag{2-78}$$

である．

なお，地表面での伝搬定数  $k_1$  が大気のそれに比べて極めて大きいことから，地表面を導体つまり  $k_1 \rightarrow \infty$  で近似すると，水平偏波の場合は  $K_0 \rightarrow \infty$  となり，高度分布関数のうち  $I_{1v} = A_v = B_v = 0$  とすればよく，一方垂直偏波の場合は  $K_0 \rightarrow 0$  となり，高度分布関数は  $I_{1h} = A_h = B_h = 0$  で近似できる．

ii)  $\eta_s \geq \eta_1 \geq -\eta_d$  の場合

波源が中層内にある場合の高度分布関数は

$$\begin{aligned}
 u(\eta, s) &= \frac{\Delta\beta_0 H}{W_4 f_0(s)} \left[ B \langle g_1(\zeta_s) g_2(\zeta_1) \rangle - A \langle g_1'(\zeta_s) g_2(\zeta_1) \rangle \right] h_2\{\tau(\eta)\} , \quad (\eta \geq \eta_s) \\
 &= \frac{\Delta\beta_0 H}{W_4 f_0(s)} I_2(\eta_1, s) I_3(\eta, s) - \frac{\Delta\beta_0 H}{W_4} \langle g_1(\zeta) g_2(\zeta_1) \rangle , \quad (\eta_s \geq \eta \geq \eta_1) \\
 &= \frac{\Delta\beta_0 H}{W_4 f_0(s)} I_2(\eta_1, s) I_3(\eta, s) , \quad (\eta_1 \geq \eta \geq -\eta_d) \\
 &= \frac{\Delta\beta_0 W_5 H}{W_4 W_6 f_0(s)} I_1(\eta, s) I_2(\eta_1, s) , \quad (-\eta_d \geq \eta \geq -\eta_e) \quad (2-79) \\
 &= \frac{\Delta\alpha\beta_0 W_5 W_8 H I_2(\eta_1, s)}{W_4 K_0 f_0(s)} \cdot \frac{h_1\{\nu(\eta)\}}{h_1\{\nu(-\eta_e)\}} , \quad (-\eta_e \geq \eta)
 \end{aligned}$$

となる。但し、

$$\begin{aligned}
 I_2(\eta_1, s) &= \beta_0 h_2'(\tau_s) \langle g_1(\zeta_s) g_2(\zeta_1) \rangle - h_2(\tau_s) \langle g_1'(\zeta_s) g_2(\zeta_1) \rangle \\
 I_3(\eta, s) &= \frac{\alpha I_{3v}(\eta, s)}{K_0} - I_{3h}(\eta, s) \\
 I_{3v}(\eta, s) &= Q_3 \langle g_1(\zeta) g_2'(\zeta_d) \rangle - \alpha\beta_0 Q_4 \langle g_1(\zeta) g_2(\zeta_d) \rangle \\
 I_{3h}(\eta, s) &= Q_1 \langle g_1(\zeta) g_2'(\zeta_d) \rangle - \alpha\beta_0 Q_2 \langle g_1(\zeta) g_2(\zeta_d) \rangle
 \end{aligned} \quad (2-80)$$

また、

$$W_4 = \langle g_1(\zeta_1) g_2'(\zeta_1) \rangle \quad (2-81)$$

としている。

iii)  $-\eta_d \geq \eta_1 \geq -\eta_e$  の場合

波源が下層内にある場合の高度分布関数は

$$\begin{aligned}
 u(\eta, s) &= \frac{\Delta\beta_0 W_3 H}{W_7 f_0(s)} I_1(\eta_1, s) h_2\{\tau(\eta)\} , \quad (\eta \geq \eta_s) \\
 &= \frac{\Delta\beta_0 H}{W_7 f_0(s)} I_1(\eta_1, s) I_2(\eta, s) , \quad (\eta_s \geq \eta \geq -\eta_d)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{\Delta\beta_0 HI_1(\eta_1, s)}{W_6 W_7 f_0(s)} \left\{ \beta_0 h_2'(\tau_s) F_1 - h_2(\tau_s) F_2 \right\} \langle h_1\{\chi(\eta)\} h_2'(\chi_d) \rangle \\
&\quad - \frac{\Delta HI_1(\eta_1, s)}{\alpha W_6 W_7 f_0(s)} \left\{ \beta_0 h_2'(\tau_s) F_3 - h_2(\tau_s) F_4 \right\} \langle h_1\{\chi(\eta)\} h_2(\chi_d) \rangle, \\
&\hspace{15em} (-\eta_d \geq \eta \geq \eta_1) \quad (2-82)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\Delta\beta_0 HI_1(\eta_1, s)}{W_6 W_7 f_0(s)} \left\{ \beta_0 h_2'(\tau_s) F_1 - h_2(\tau_s) F_2 \right\} \langle h_1\{\chi(\eta)\} h_2'(\chi_d) \rangle \\
&\quad - \frac{\Delta HI_1(\eta_1, s)}{\alpha W_6 W_7 f_0(s)} \left\{ \beta_0 h_2'(\tau_s) F_3 - h_2(\tau_s) F_4 \right\} \langle h_1\{\chi(\eta)\} h_2(\chi_d) \rangle, \\
&\hspace{15em} + \frac{\Delta H}{\alpha W_7} \langle h_1\{\chi(\eta)\} h_2(\chi_1) \rangle, \quad (\eta_1 \geq \eta \geq -\eta_e)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\Delta HI_1(\eta_1, s) h_2\{\nu(\eta)\}}{\alpha W_6 W_7 f_0(s) h_2\{\nu(-\eta_e)\}} \cdot \left\{ \beta_0 A_h(s) h_2'(\tau_s) - B_h(s) h_2(\tau_s) \right\} \\
&\hspace{15em} + \frac{\Delta H h_2\{\nu(\eta)\}}{\alpha W_7 h_2\{\nu(-\eta_e)\}} \langle h_1(\chi_e) h_2(\chi_1) \rangle, \quad (-\eta_e \geq \eta)
\end{aligned}$$

となる。但し、

$$W_7 = \langle h_1(\xi_1) h_2'(\xi_1) \rangle \quad (2-83)$$

とおいてある。

## 2. 7 相 対 受 信 電 界 強 度

波動関数(2-71)を用いると、水平方向に均一な成層ダクト大気でのヘルツ・ベクトル  $\psi^{uni}$  は、式(2-52)の導出と同様固有値  $s=s_i$  から得られる第  $i$  モードの総和として

$$\psi^{uni}(R, \eta) = \sum_{i=1}^{\infty} \Lambda_0(R, s_i) U_0(\eta, s_i) \quad (2-84)$$

と与えられる。但し、

$$\Lambda_0(R, s) = \frac{j\Delta\pi\beta_0\psi_0(s)H_0^{(2)}(\kappa LR)}{2H}$$

$$\psi_0(s) = \frac{h_2\{\tau(\eta_s, s)\}U_0(\eta_1, s)}{A(s)\frac{\partial f_0(s)}{\partial s}} \quad (2-85)$$

である．ここに， $\Lambda_0(R, s_i)$ は距離 $R$ での第 $i$ モードの振幅値， $U_0(\eta, s_i)$ はそのときの高度分布関数である．但し，固有値 $s_i$ は式(2-54)，(2-76)よりモード方程式

$$f_0(s) = \frac{\alpha f_v(s)}{K_0} - f_h(s) = 0 \quad (2-86)$$

の根 $s_i (= x_i + jy_i)$ のうち虚部が正であるものだけである．なお，

$$f_{v,h}(s) = \beta_0 A_{v,h}(s) h_2\{\tau(\eta_s, s)\} - B_{v,h}(s) h_2\{\tau(\eta_s, s)\} \quad (2-87)$$

とにおいてあり，高度分布関数 $U_0(\eta, s)$ は

$$\begin{aligned} U_0(\eta, s) &= \frac{Ah_2\{\tau(\eta)\}}{h_2\{\tau(\eta_s)\}}, \quad (\eta \geq \eta_s) \\ &= \left\{ \frac{\alpha Q_3}{K_0} - Q_1 \right\} \langle g_1(\xi) g_2'(\xi_d) \rangle \\ &\quad - \alpha\beta_0 \left\{ \frac{\alpha Q_4}{K_0} - Q_2 \right\} \langle g_1(\xi) g_2(\xi_d) \rangle, \quad (\eta_s \geq \eta \geq -\eta_d) \\ &= \frac{\alpha W_d}{K_0} \langle h_1\{\chi(\eta)\} h_2'\{\chi(-\eta_e)\} \rangle \\ &\quad - W_d \langle h_1\{\chi(\eta)\} h_2\{\chi(-\eta_e)\} \rangle, \quad (-\eta_d \geq \eta \geq -\eta_e) \\ &= \frac{W_d W_e (\alpha/K_0) h_1\{\nu(\eta)\}}{h_1\{\nu(-\eta_e)\}}, \quad (-\eta_e \geq \eta) \quad (2-88) \end{aligned}$$

である．但し， $U_0(\eta_1, s)$ は送信高 $\eta = \eta_1$ での高度関数であり，また $W_d$ と $W_e$ はそれぞれ $g_j(\xi_d)$ および $h_j\{\chi(-\eta_e)\}$ のWronskian，つまり

$$W_d = \langle g_1(\zeta_d) g_2'(\zeta_d) \rangle \quad (2-89)$$

$$W_e = \langle h_1 \{ \chi(-\eta_e) \} h_2' \{ \chi(-\eta_e) \} \rangle$$

である。

なお，式(2-63)を $n=0.5$ とすると，屈折率 $K(\eta)$ は **bilinear** プロファイルとなり，解(2-69)は式(2-66a)に一致する．この場合の屈折率傾度 $\alpha^3$ は任意に定めればよく，式(2-84)は **bilinear** モデルでのヘルツ・ベクトルとなる．

自由空間値に対する相対受信電界強度 $F$ は

$$F(R, \eta) = \frac{r \psi^{uni}(R, \eta)}{\Delta e^{-jkr}} \quad (2-90)$$

で与えられる．従って，式(2-84)より

$$F(R, \eta) = \beta_0 \sqrt{\pi R} e^{j3\pi/4} \sum_{i=0}^{\infty} e^{js_i R} h_2\left(\frac{\eta_s}{2n} + s_i\right) \cdot \frac{U_0(\eta, s_i) U_0(\eta_1, s_i)}{A(s_i) \left[ \frac{\partial f_0(s)}{\partial s} \right]_{s=s_i}} \quad (2-91)$$

となる．また，上式を書き換えると，

$$F(R, \eta) = \beta_0 \sqrt{\pi R} e^{j(3\pi/4 + \Theta)} \cdot \sqrt{\sum P_i^2 e^{-2Ry_i} + 2 \sum P_i P_j e^{-R(y_i + y_j)} \cos R(x_i - x_j)} , \quad (i \neq j) \quad (2-92)$$

となる．但し，

$$P_i = h_2\left(\frac{\eta_s}{2n} + s_i\right) \frac{U_0(\eta, s_i) U_0(\eta_1, s_i)}{A(s_i) \left[ \frac{\partial f_0(s)}{\partial s} \right]_{s=s_i}} \quad (2-93a)$$

$$\Theta = \frac{\sum P_i e^{-R y_i} \sin(R x_i)}{\sum P_i e^{-R y_i} \cos(R x_i)} \quad (2-93b)$$

とにおいてある．式(2-92)の根号内の第1項は各モードの距離特性を表しており，一方第2項はモード干渉を与える項となる．例えば，伝搬に寄与するモードが2つ存在する場合，距離に対して $\cos R(x_i - x_j)$ の周期性が現れることになる．

## 2. 8 モード方程式の根

モード方程式(2-86)を解いて根 $s_i$ , ( $i=1, 2, 3, \dots$ )を求めることはかなり厄介であり，本論文ではモード方程式(2-86)の変数 $s$ で探索を行ない，得られた近似根を初期値とするニュートン法で根 $s_i$ を求めている．但し，地表面とそれに接する大気の伝搬定数の比 $k_1/k_0$ としては $k_1/k_0 = 10 \exp(-j\pi/4)$ を採用した．

図2-2(但し，図は本節末添付．以後これに従う)は上層大気(標準大気)下に2乗特性( $n=1$ )をもつ逆転大気が存在するような大気モデルに対し，この大気層の厚さを変えた場合のモード方程式の根軌跡である．但し，水平偏波の場合であり，ここでは厚さ $\eta_s = \eta_d$ としている．図2-2から明らかなように，2つの根群に分類できる．つまり，一方の根群は $s$ 平面での偏角 $2\pi/3$ 近くに，他方はほぼ第1象限内に存在する．下層の2乗プロファイル大気が存在しない標準大気だけの場合，モード方程式の根群は1/3次の修正ハンケル関数 $h_2(s)$ の零点<sup>(62)</sup>だけとなり，これらの偏角は $2\pi/3$ であることは周知の通りである．このことから，図2-2の偏角 $2\pi/3$ 近くに位置する一群の根は，標準大気の存在で得られる固有の根であり，2乗特性をもつ大気層が加わることによってわずかに変移する根群であることがわかる．しかし，図2-2からも明らかなように $h_2(s)$ の第1零点から派生した根は中層の厚み $\eta_s + \eta_d$ の増大とともに極めて小さな虚部をもつようになり，伝搬に最も寄与する根となる．また， $h_2(s)$ の第2，第3， $\dots$ の零点から派生した根の

虚部はほとんど変化せず，遠距離への伝搬に寄与することはない。

次に，中層の厚さ $\eta_s + \eta_d$ の増大とともに $s$ 平面の原点方向に漸近する第1象限内の一群の根は，標準大気下にある2乗Nプロファイルの逆転大気存在によって発生したものであり，大気の急激な屈折率変動のような大気の不均一性によって誘起される根であることがわかる。

ここで，図2-2で示したように， $h_2(s)$ の第1零点から派生した根も含め，第1象限内にある根群を小さな虚部の順に $s_1, s_2, s_3, \dots, (\text{Im}(s_1) < \text{Im}(s_2) < \text{Im}(s_3) < \dots)$ とし，これらから得られる受信電界をそれぞれ第1モード，第2モード，第3モード， $\dots$ と呼ぶことにする。また，垂直偏波の場合も同様とする。

4乗，6乗，8乗と高次のNプロファイルをもつ逆転大気層の場合の根軌跡は，それぞれ図2-3，図2-4，図2-5に示した。これらも上述と同様の傾向を示すが，次数 $n$ の増大とともに第1象限内の根の虚部はわずかずつ小さくなり，それぞれの根軌跡の勾配は緩やかになる。各プロファイルでの根 $s_i$ の内 $s_1$ の比較はこの後で述べることにする。

また，図2-6，図2-7，図2-8，図2-9はそれぞれ $n=1, 2, 3, 4$ の順に示した垂直偏波での根軌跡である。垂直偏波の場合も水平偏波とほぼ同じ傾向を示す。但し，垂直偏波でのモード方程式の根の虚部 $\text{Im}(s_i)$ は水平偏波でのそれより小さくなる。

中層の厚さ $\eta_s$ を固定し，逆転大気の厚さ $\eta_d$ に対する第1モードの根 $s_1$ の変化を水平偏波に対して図2-10～図2-13に，また垂直偏波に対しては図2-14～図2-17に示した。但し，図中の表示 $n=1, 2, 3, \dots$ は逆転層の形状，つまり2乗Nプロファイル，4乗Nプロファイル等を表している。中層の厚さ $\eta_d$ が一定値を越えると $s_1$ は急激に減少するようになり，逆転層内への波のトラップがこの厚さから始まることになる。水平偏波の場合，中層の厚さ $\eta_s=1$ での減少位置は $\eta_d/\eta_s \cong 2$ からであるが， $\eta_s=2$ の場合には $\eta_d/\eta_s \cong 1.6$ となり，厚さ $\eta_s$ の増大に従って $\eta_d/\eta_s$ の比率は小さくなる，つまり $\eta_d$ の厚さが薄いうちからトラップ現象

が始まる．なお、 $n$ の増加とともに根の虚部 $\text{Im}(s_1)$ は減少傾向を示すが、これは $\eta_d$ の増大とともに負の屈折率傾度が大きくなることによる．また、水平・垂直両偏波を比べると、前者より後者の方がより薄い逆転層でトラップ現象を発生させる．

中層の厚さ $\eta_s = \eta_d$ を固定し、下層大気の深さ $l (= \eta_e - \eta_d)$ が増大する場合も根 $s_i$ の虚部は減少する．ここで、根 $s_i$ の内 $s_1$ および $s_2$ を各プロファイルについて比較してみる．図2-18と図2-19はそれぞれ負の屈折率傾度をもつ下層大気の深さ $l$ に対する根 $s_1, s_2$ の実部および虚部の変化を描いたものである．但し、中層の厚さを $\eta_s = \eta_d = 3$ としている．下層大気の深さ $l = 0$ の場合、 $n = 1$ の根 $s_1, s_2$ の虚部はいずれも他のNプロファイルの根より大きな値を示すが、厚さ $l$ の増大とともにしだいに他より小さくなり、各プロファイル間に差を生ずるようになる．さらに、下層の厚さが増していくと、2乗Nプロファイル、4乗Nプロファイル等各プロファイル間の差異はしだいに減少する．図2-18と図2-19より $l$ の増大とともに $s_1$ の実部が負の値を示し、虚部は急激に減少する．さらに $l$ が厚くなると $s_2$ も同様の傾向を示すようになり、以後高次の根もこれに従うことになる．このことから厚さ $l$ の増大に従って伝搬に寄与する第1モード、第2モード等が順次誘起されることがわかる．なお、逆転層を形成する中層大気が薄くなるに従って、根 $s_1, s_2$ はいずれも屈折率傾度ゼロ付近のプロファイルにあまり依存せず、各プロファイル間の根に差が現れなくなる．この例として中層の厚さ $\eta_s = \eta_d = 2$ の場合を図2-20および図2-21に、また厚さ $\eta_s = \eta_d = 1$ の場合を図2-22および図2-23に示した．垂直偏波も同様の傾向を示す．そこで、下層大気の深さ $l$ に対する $s_1, s_2$ の実部および虚部の変化を中層の厚さ $\eta_s = \eta_d = 3, 2, 1$ の順で図2-24～図2-29に示した．

なお、地表面と大気の伝搬定数の比 $k_1/k_0$ に $k_1/k_0 = 10 \exp(-j\pi/4)$ を採用したが、周波数が高く大気の伝搬定数が非常に大きい場合、地表面の伝搬定数 $k_1$ を $k_1 \rightarrow \infty$ とする地表面の導体近似でのモード方程式の根 $s_i$ と前述のそれとの差はわ

ずかであり，地表面の導体近似は有効である．

また，モード方程式(2-86)の根の導出にルンゲ・クッタによる数値解法を用いたところ，級数解によるものとの一致を見ることができ， $2n$ 乗 $N$ プロファイル大気層に採用した級数解(2-69)の正しいことの確認を得ている．

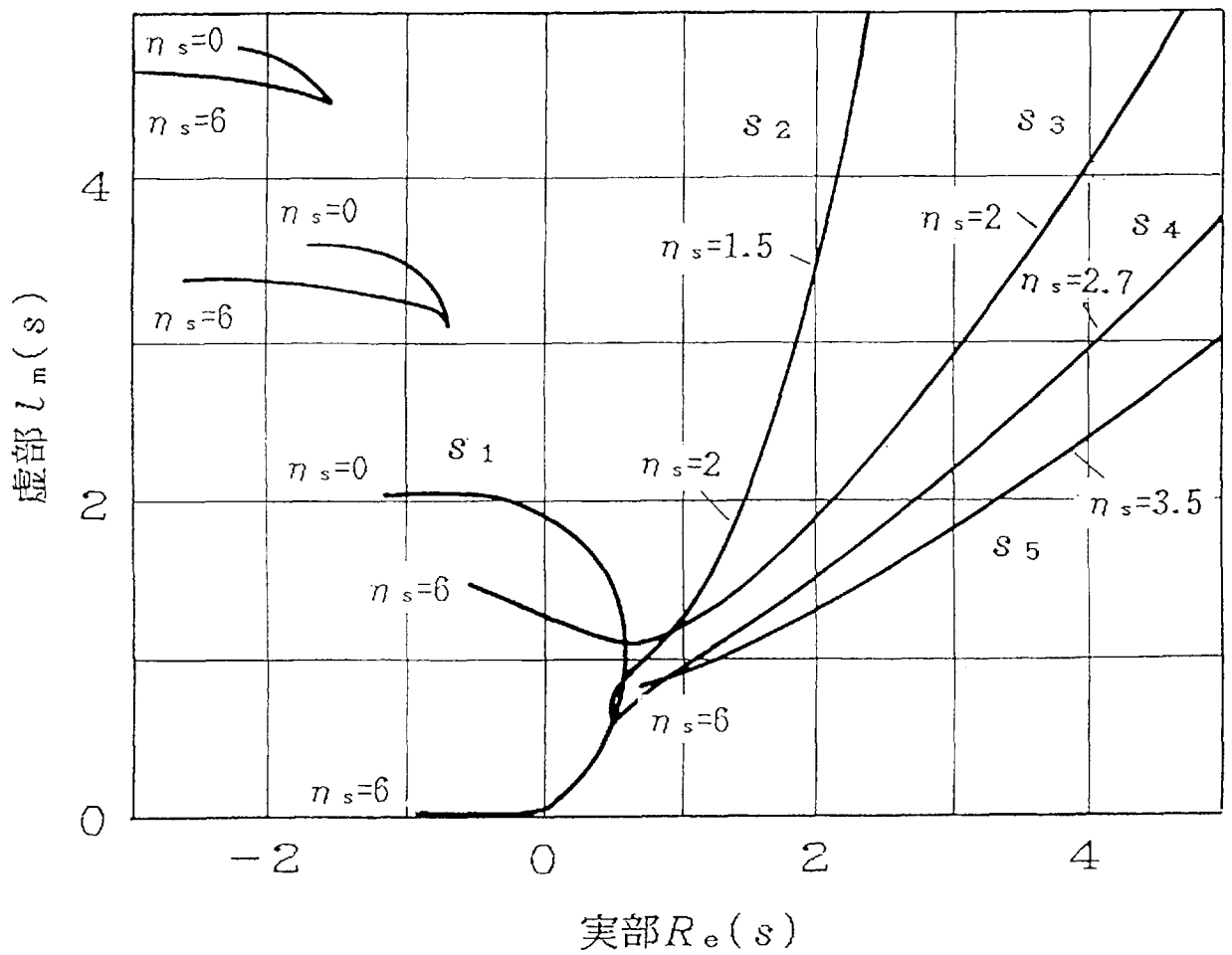


図2-2 モード方程式の根軌跡 (2乗Nプロファイル)

ただし,  $n_s = n_d$ ,  $l = 0$  (水平偏波)



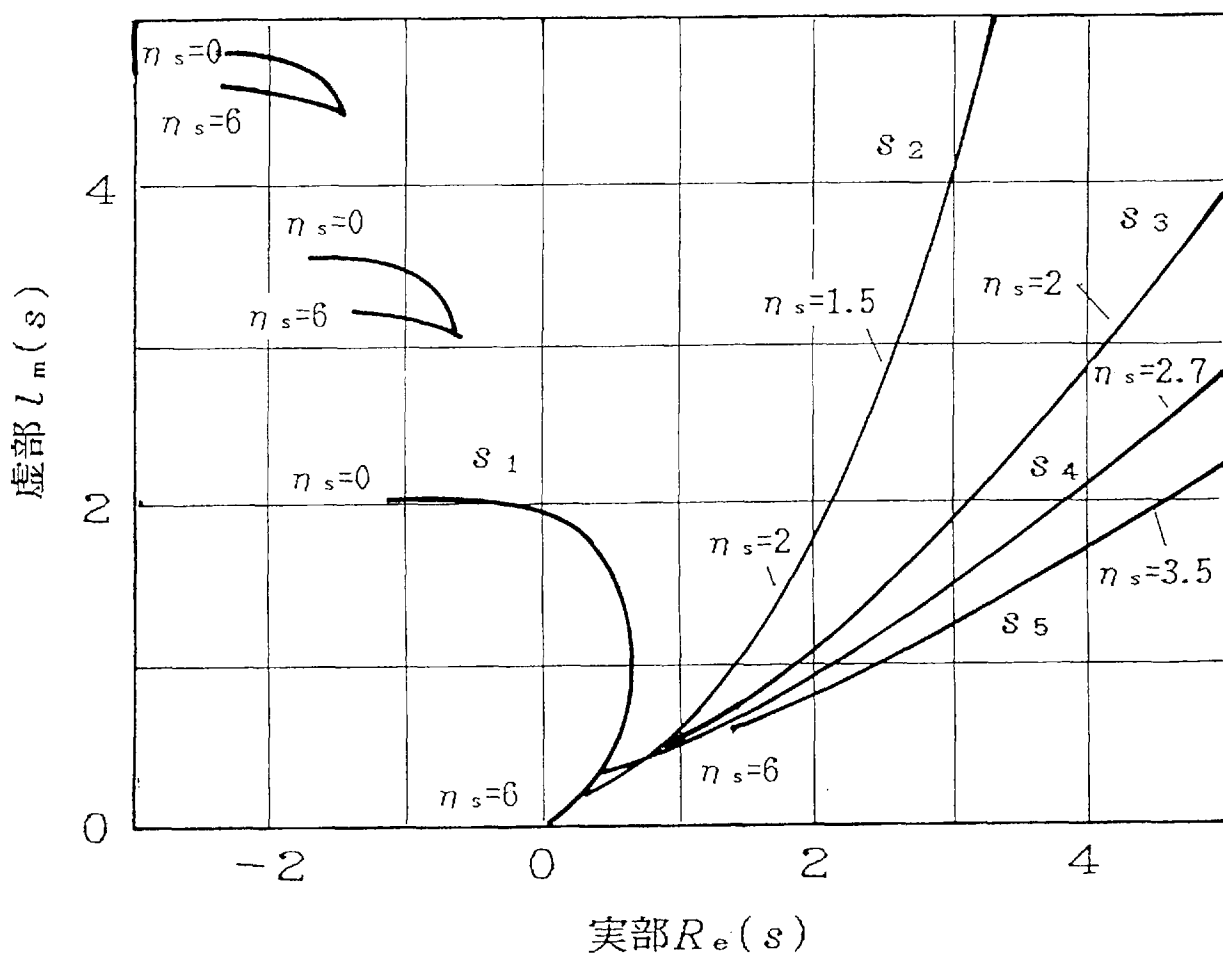


図2-3 モード方程式の根軌跡 (4乗Nプロファイル)

ただし,  $n_s = n_d$ ,  $l = 0$  (水平偏波)

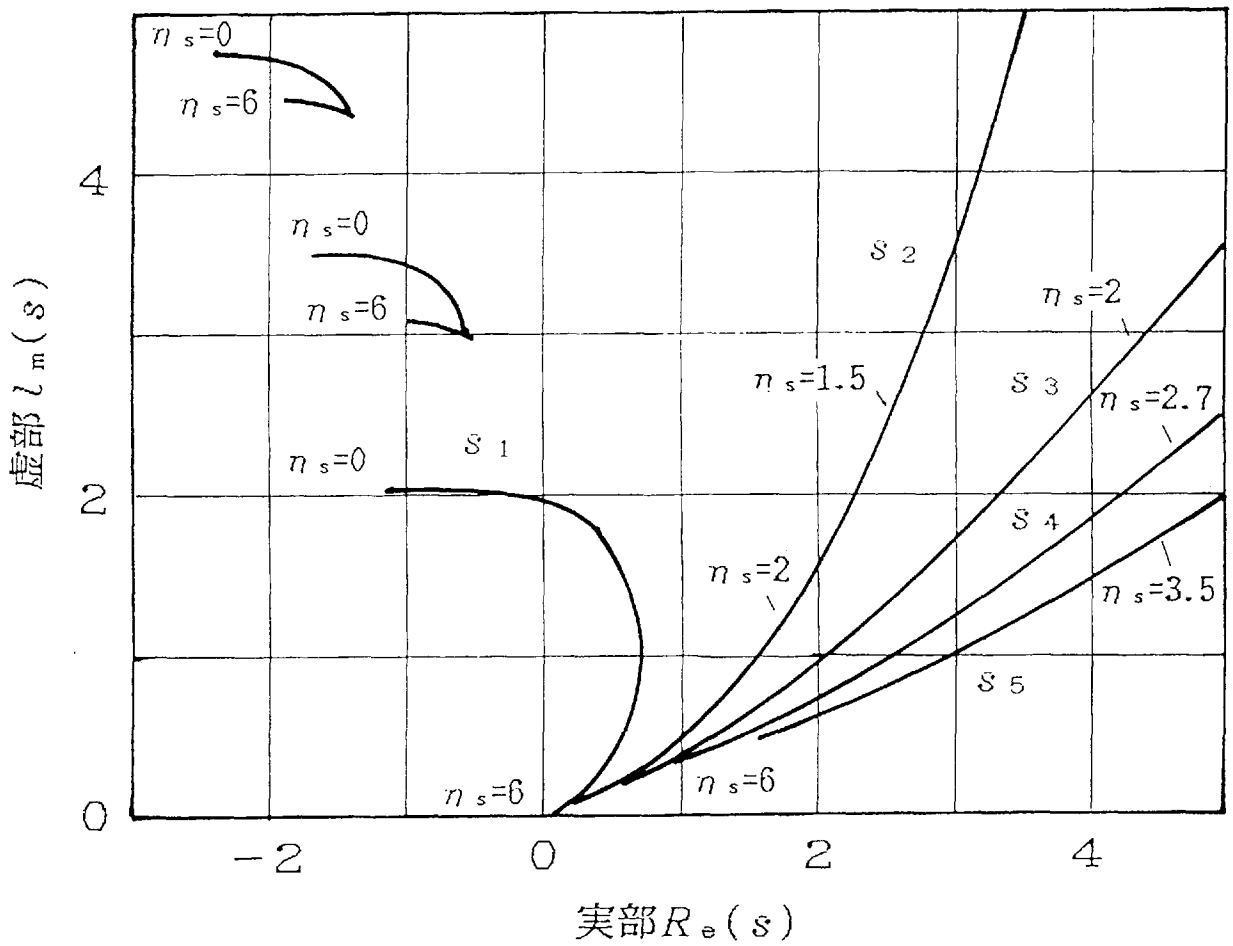


図2-4 モード方程式の根軌跡 (6乗Nプロファイル)

ただし,  $n_s = n_d$ ,  $l = 0$  (水平偏波)

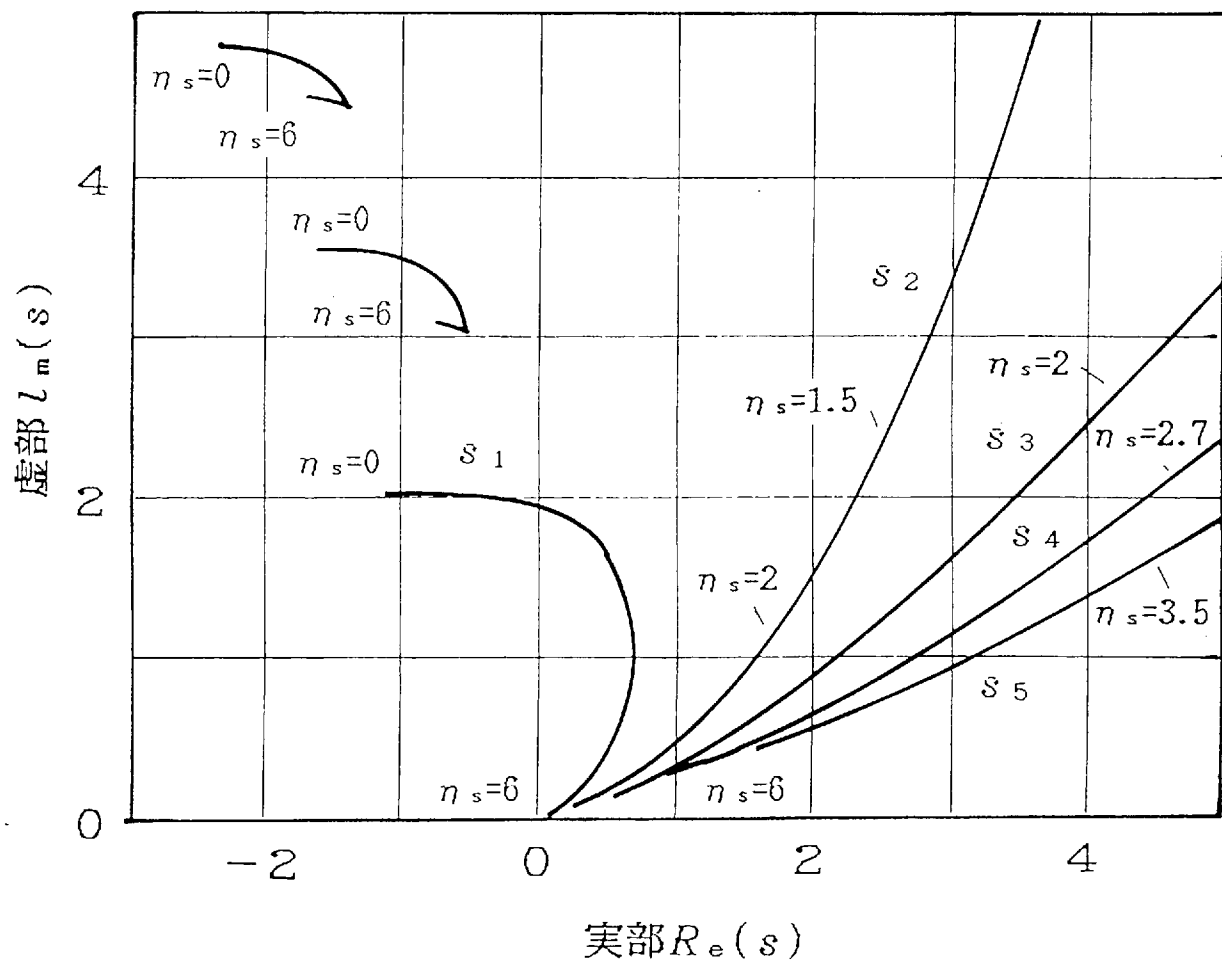


図2-5 モード方程式の根軌跡 (8乗Nプロファイル)

ただし,  $n_s = n_d$ ,  $l = 0$  (水平偏波)

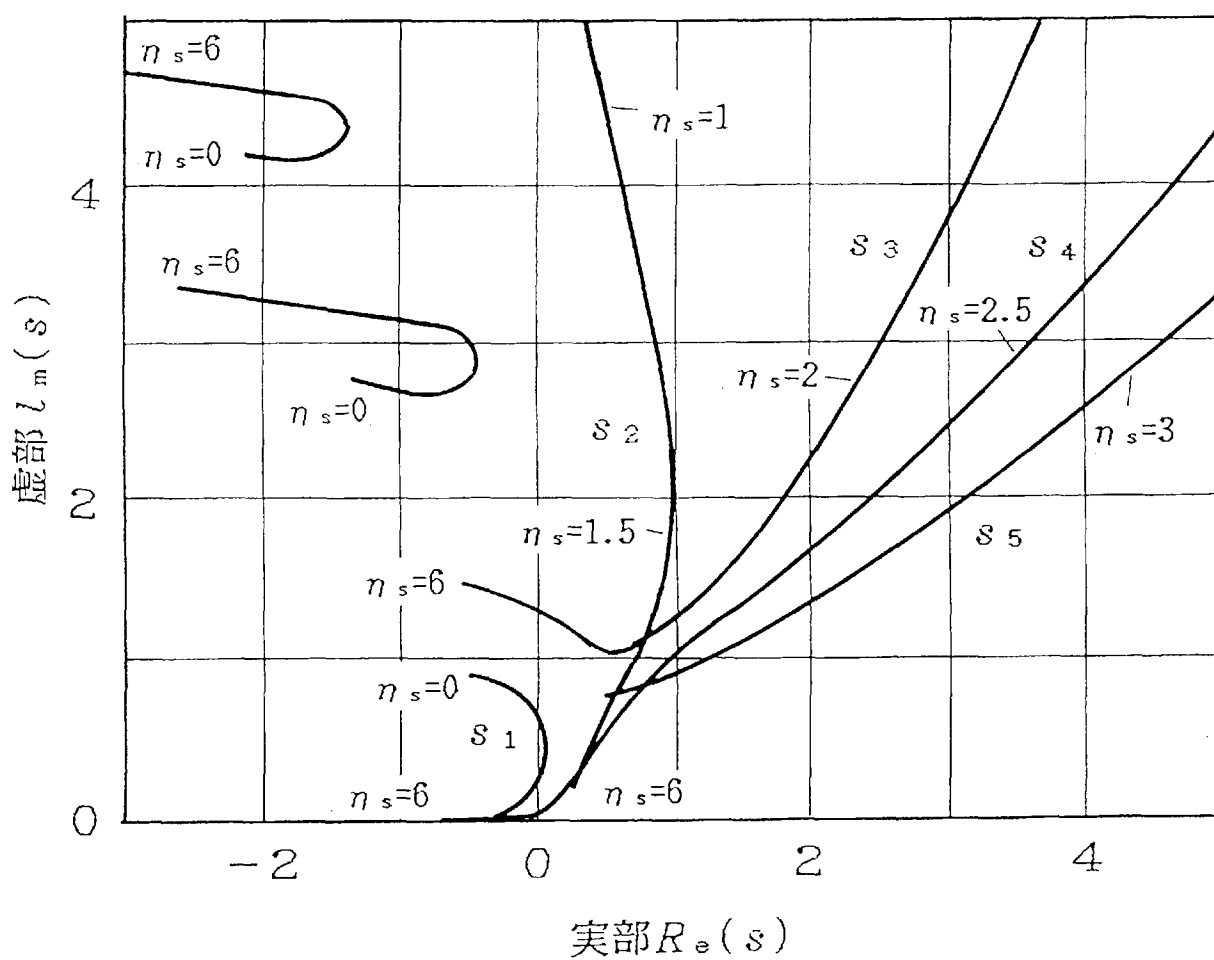


図2-6 モード方程式の根軌跡 (2乗Nプロファイル)

ただし,  $n_s = n_d$ ,  $l = 0$  (垂直偏波)

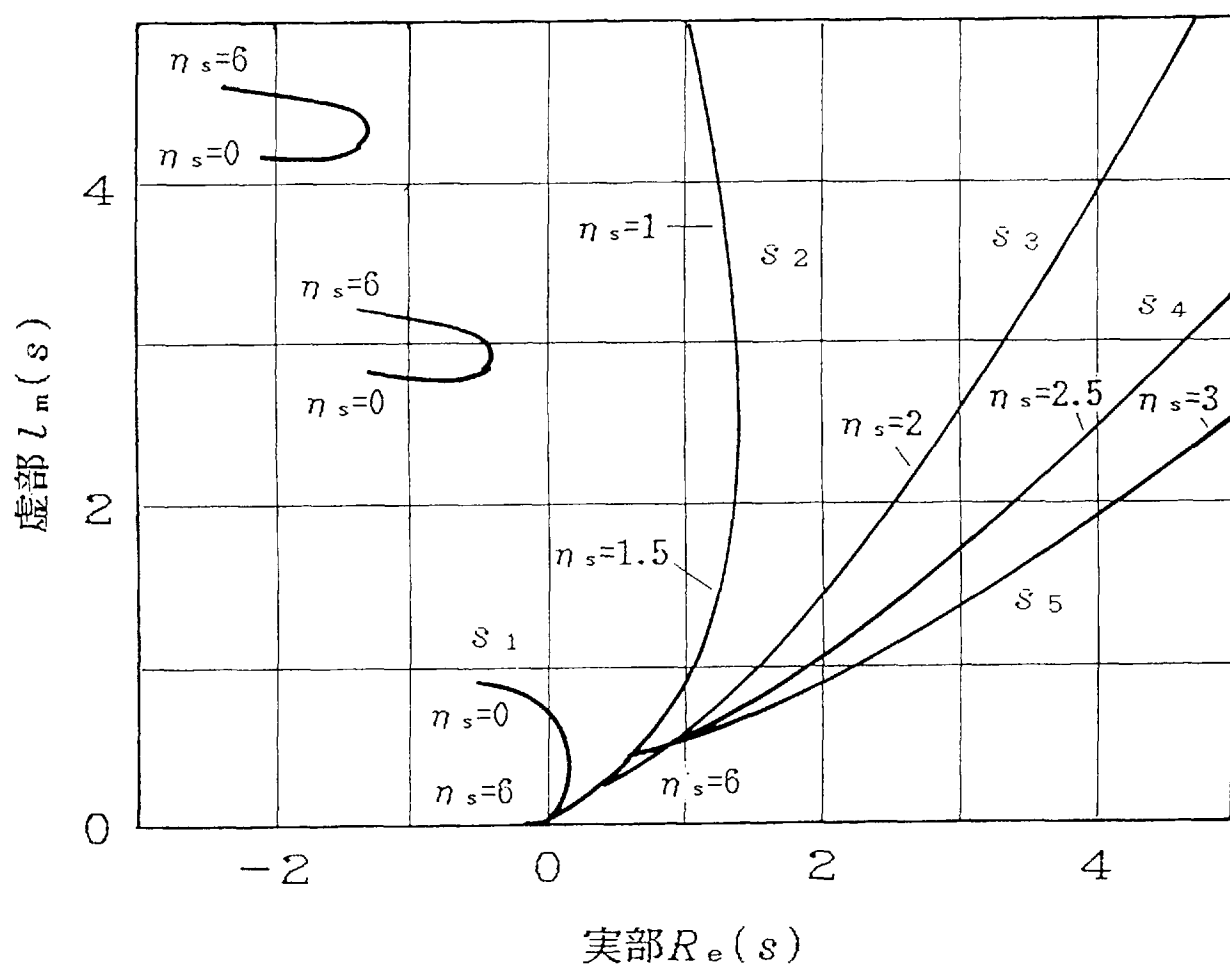


図2-7 モード方程式の根軌跡 (4乗Nプロファイル)

ただし,  $n_s = n_d$ ,  $l = 0$  (垂直偏波)

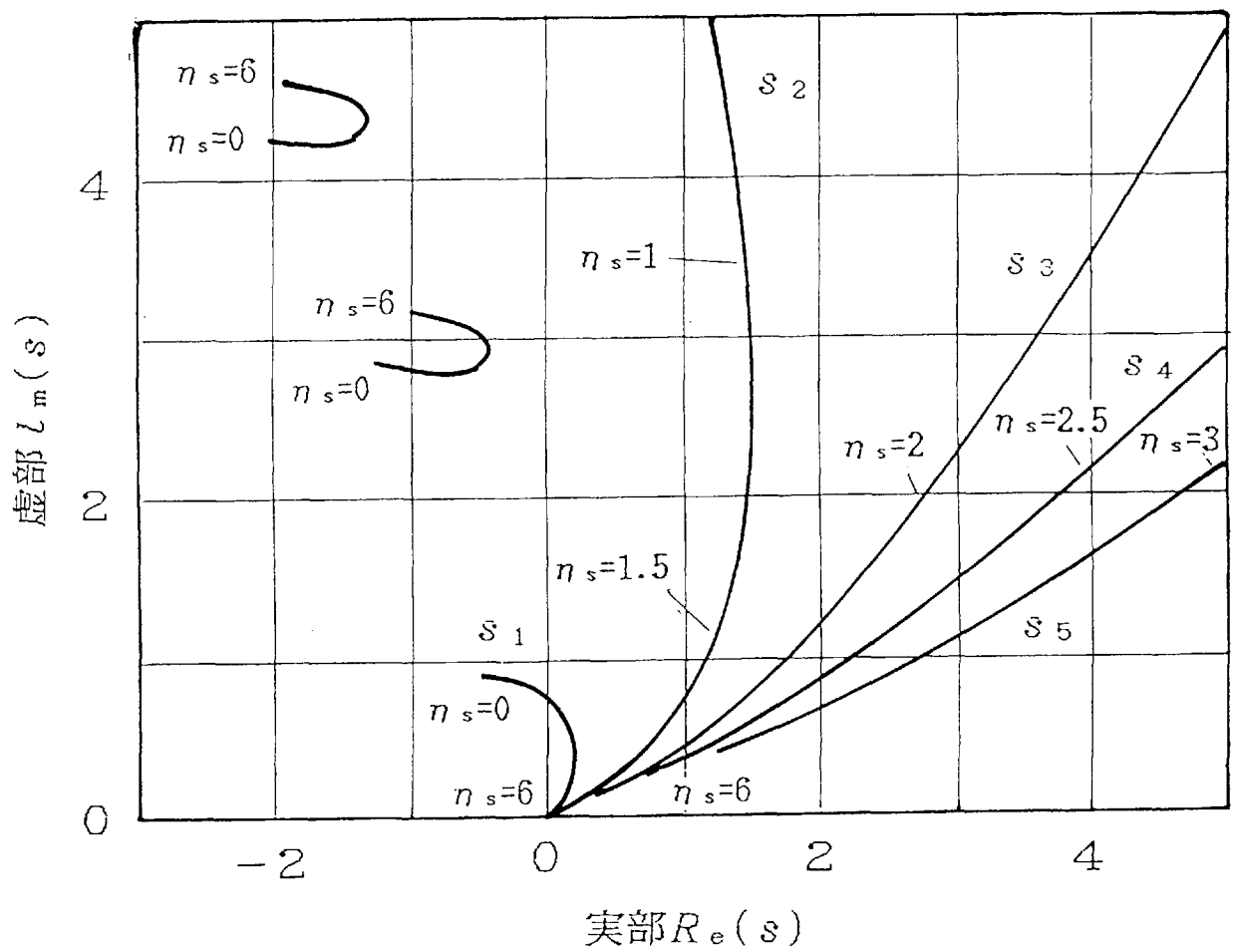


図2-8 モード方程式の根軌跡 (6乗Nプロファイル)

ただし,  $n_s = n_d$ ,  $l = 0$  (垂直偏波)

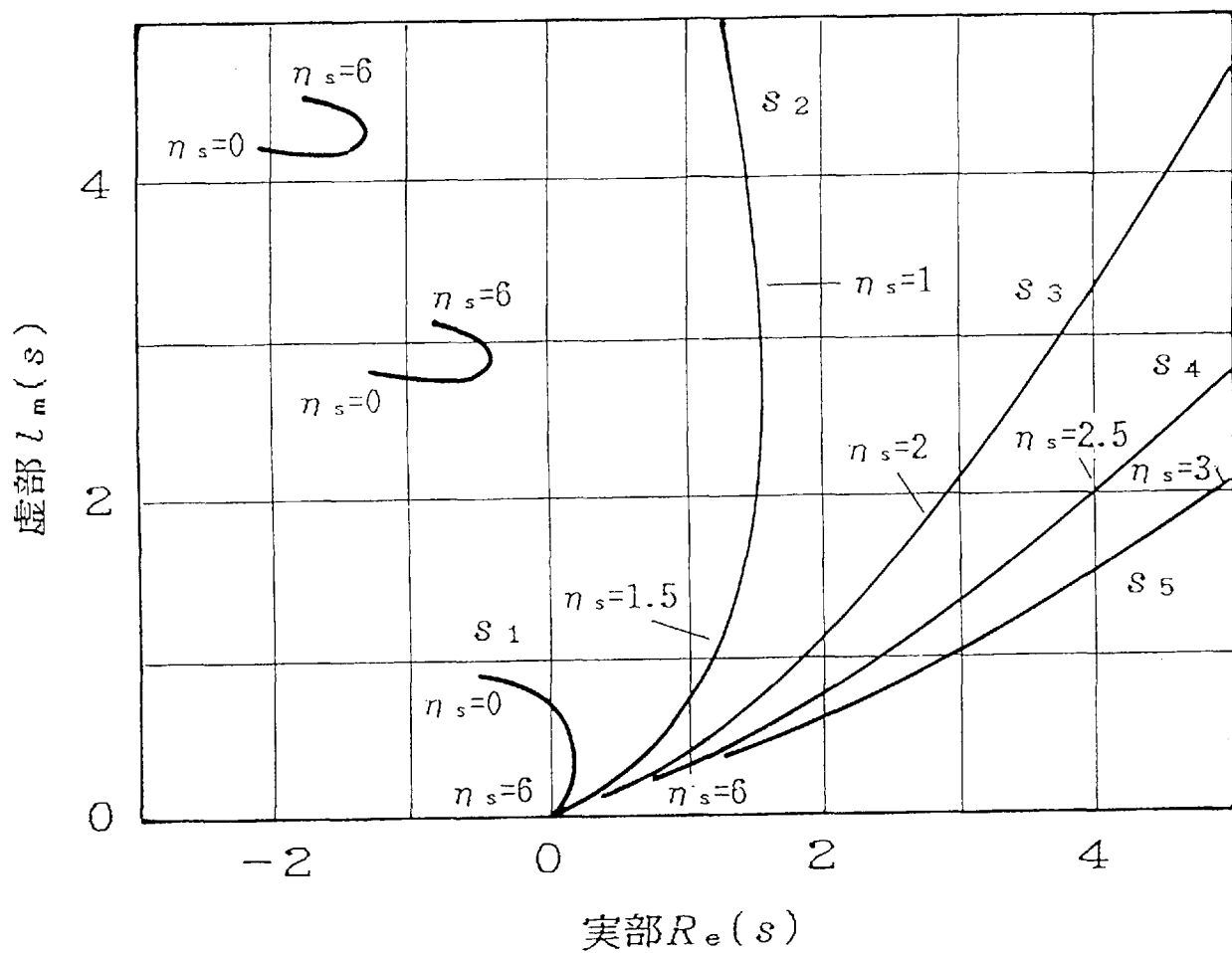


図2-9 モード方程式の根軌跡 (8乗Nプロファイル)

ただし,  $n_s = n_d$ ,  $l = 0$  (垂直偏波)

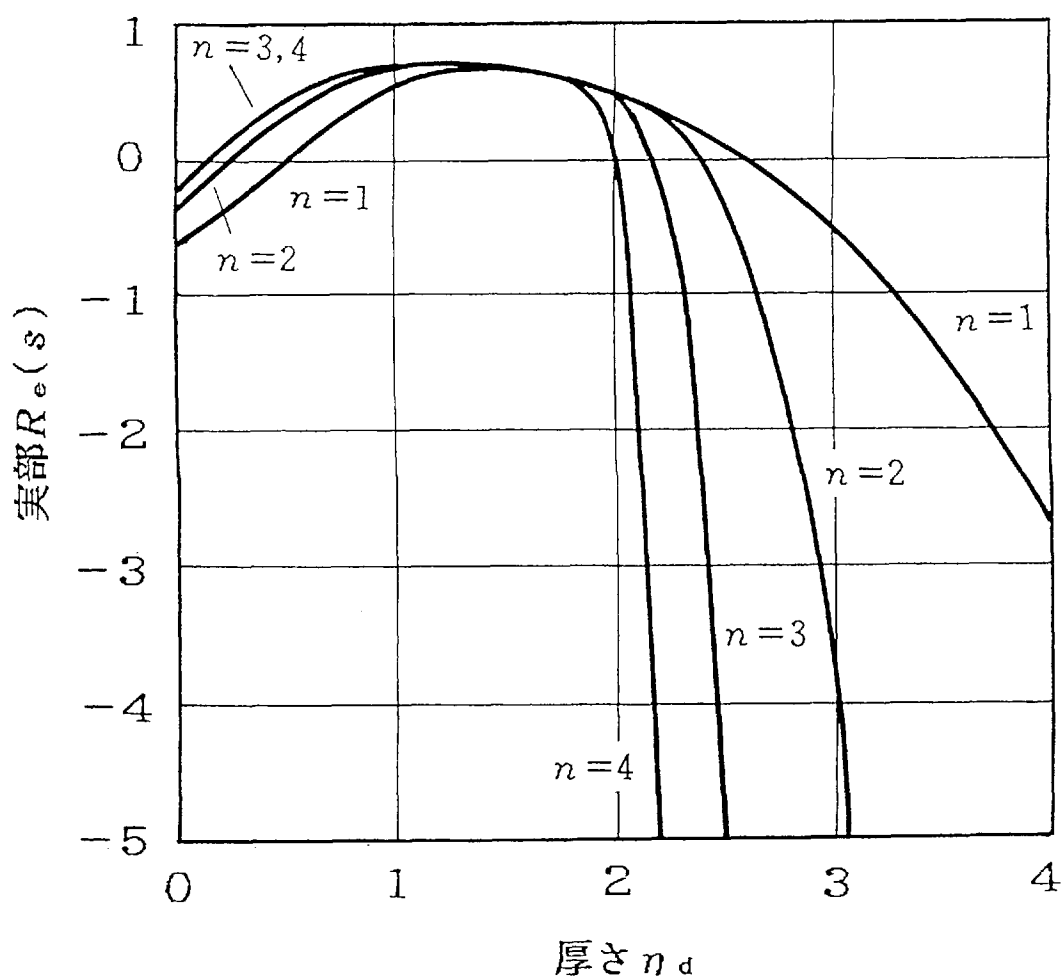


図2-10 中層大気の厚さ  $n_d$  に対する根  $s_1$  の実部の変化  
ただし,  $n_s=1$ ,  $l=0$  (水平偏波)



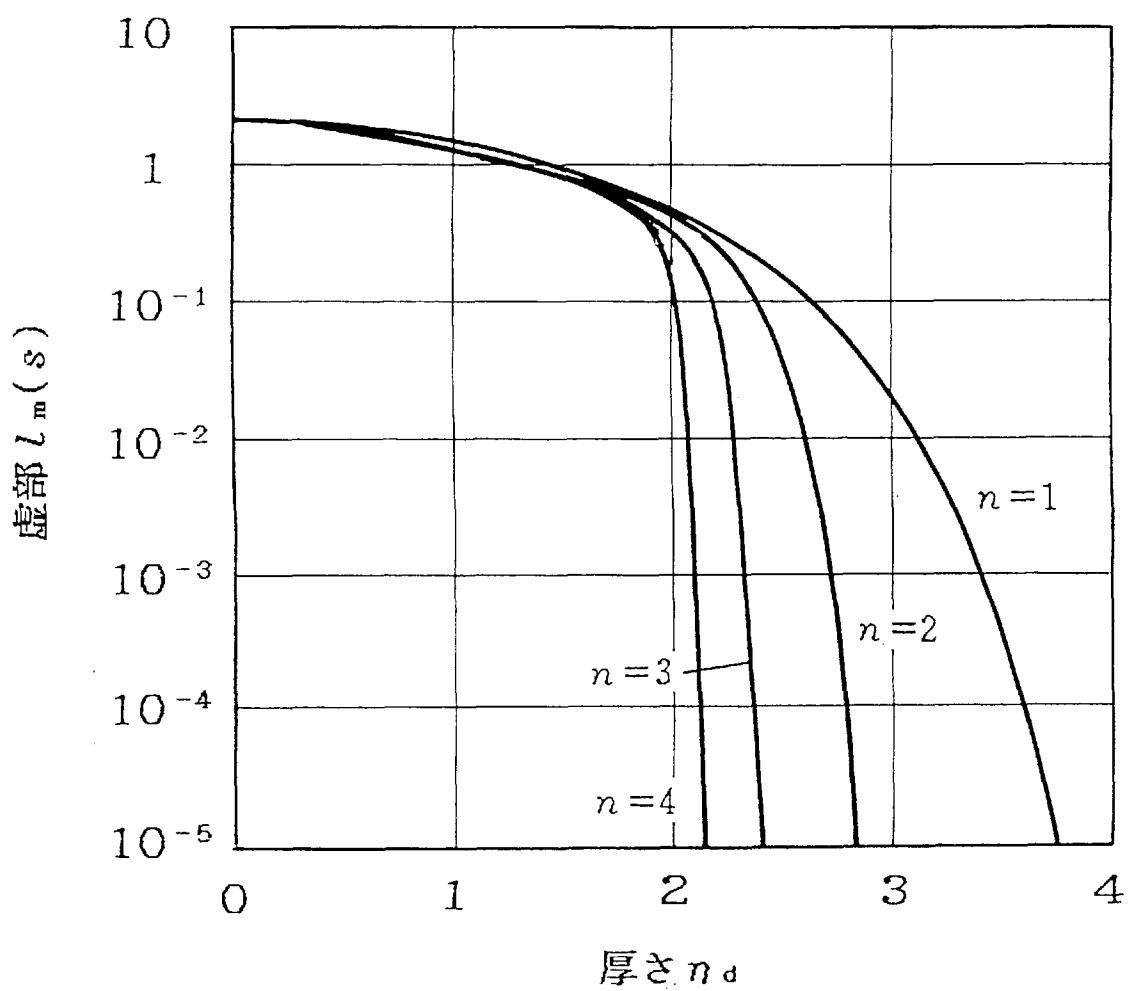


図2-11 中層大気の厚さ  $n_d$  に対する根  $s_1$  の虚部の変化  
ただし,  $n_s=1$ ,  $l=0$  (水平偏波)

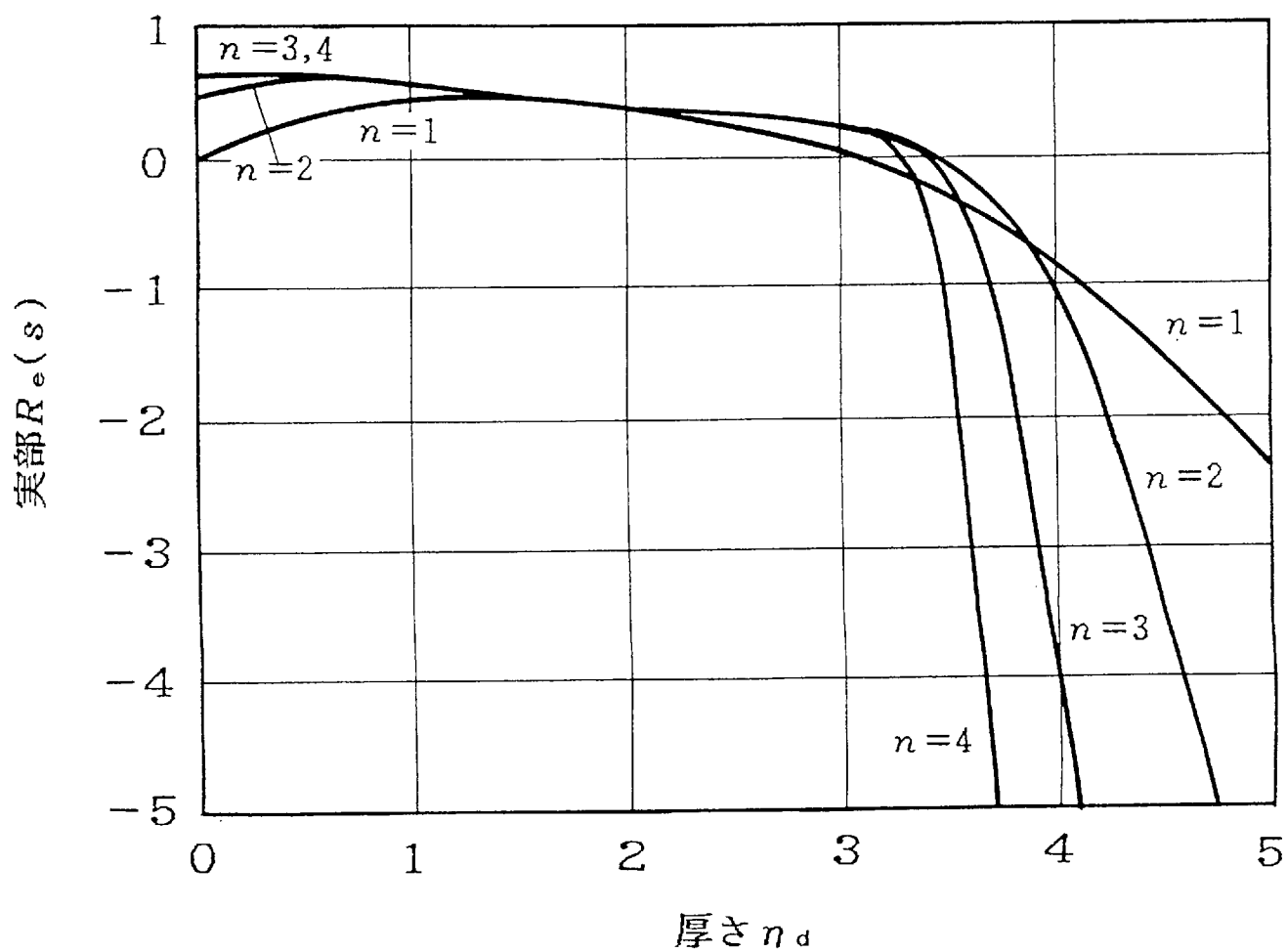


図2-12 中層大気の厚さ  $n_d$  に対する根  $s_1$  の実部の変化  
ただし,  $n_s=2$ ,  $l=0$  (水平偏波)

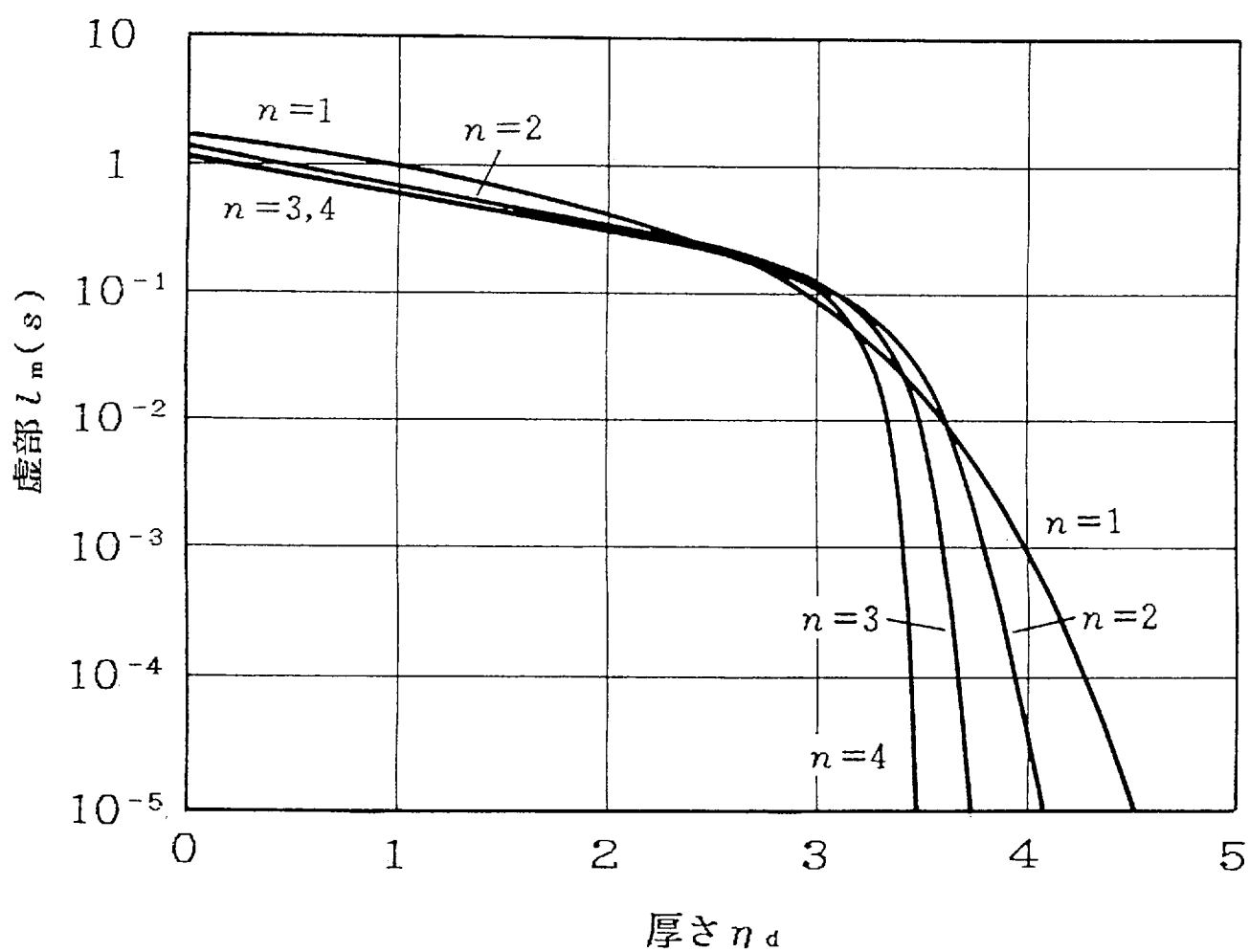


図2-13 中層大気の厚さ  $\eta_d$  に対する根  $s_1$  の虚部の変化  
ただし,  $\eta_s=2$ ,  $l=0$  (水平偏波)

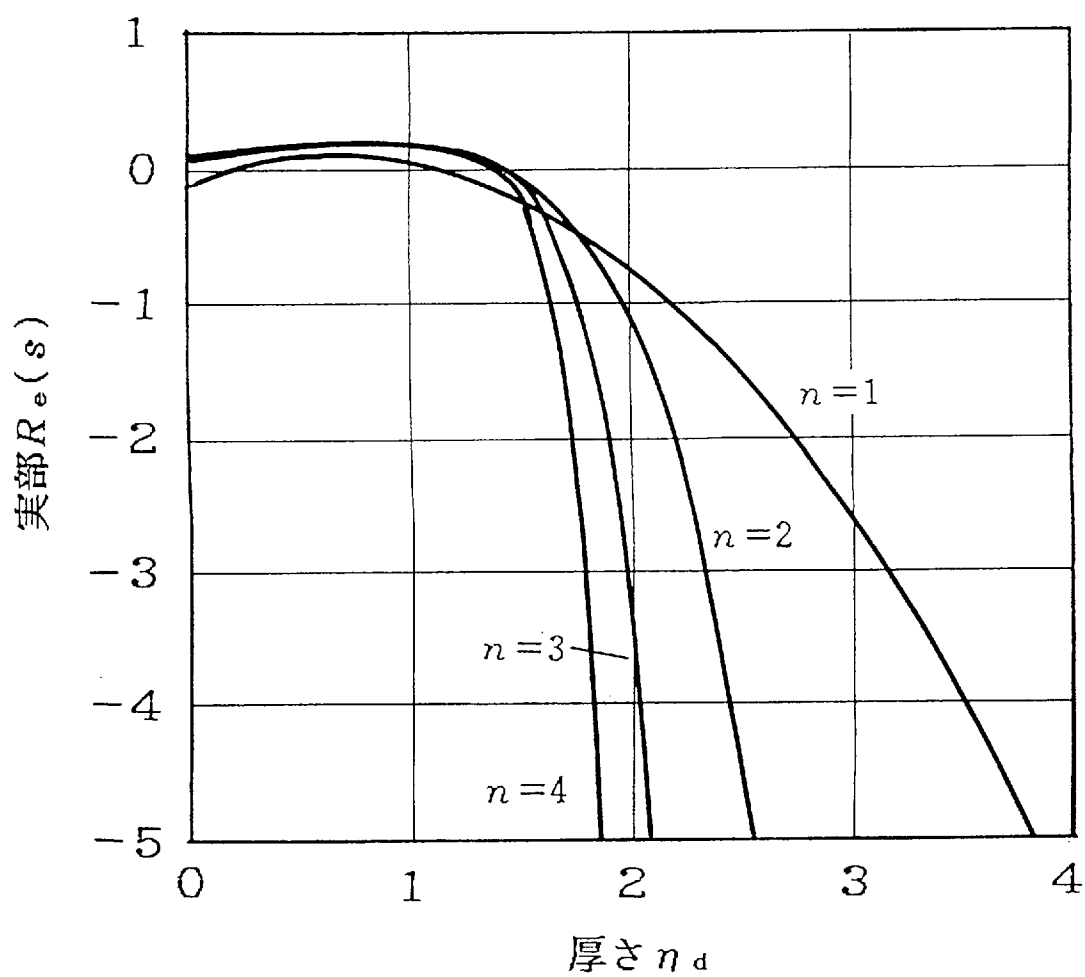


図2-14 中層大気の厚さ  $\eta_d$  に対する根  $s_1$  の実部の変化  
ただし,  $n_s = 1$ ,  $l = 0$  (垂直偏波)

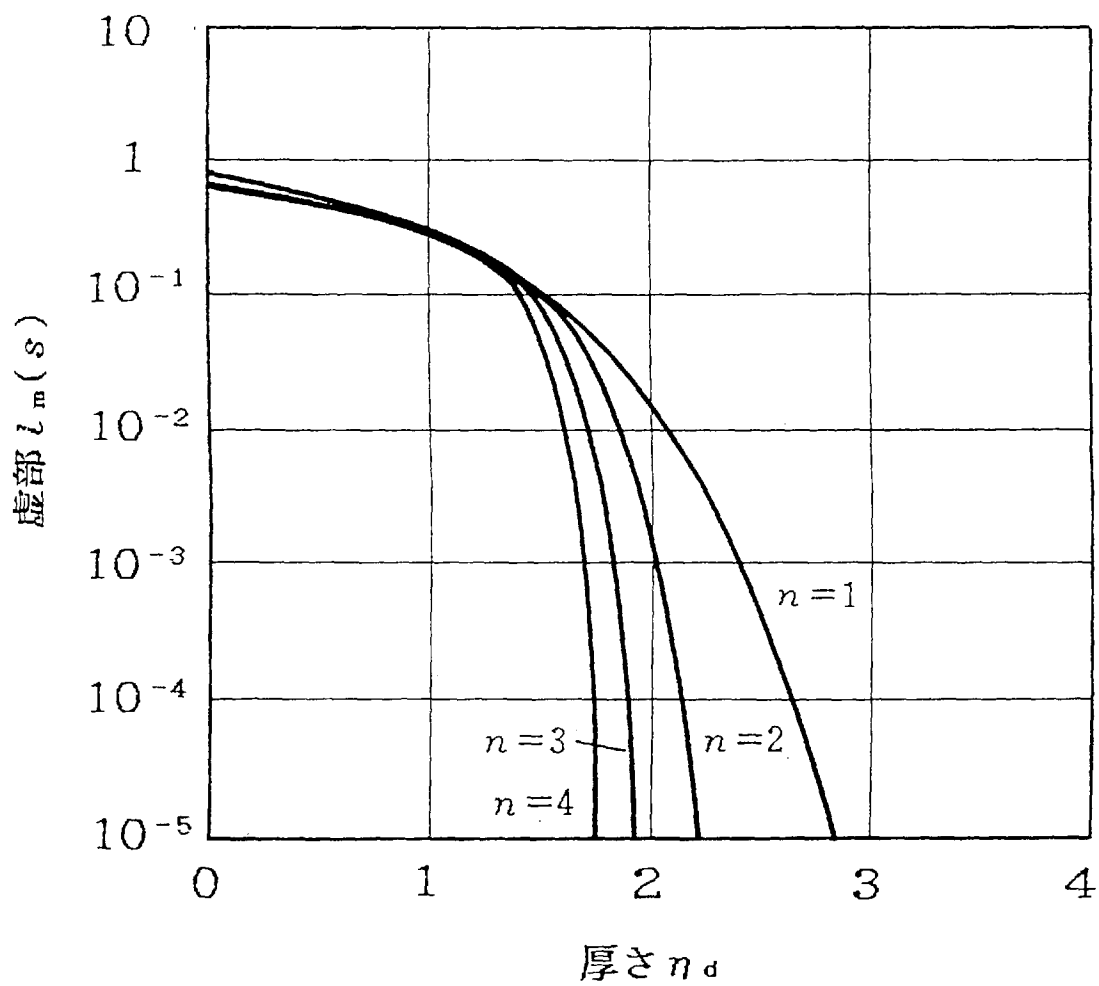


図2-15 中層大気の厚さ  $n_d$  に対する根  $s_1$  の虚部の変化  
ただし,  $n_s=1$ ,  $l=0$  (垂直偏波)

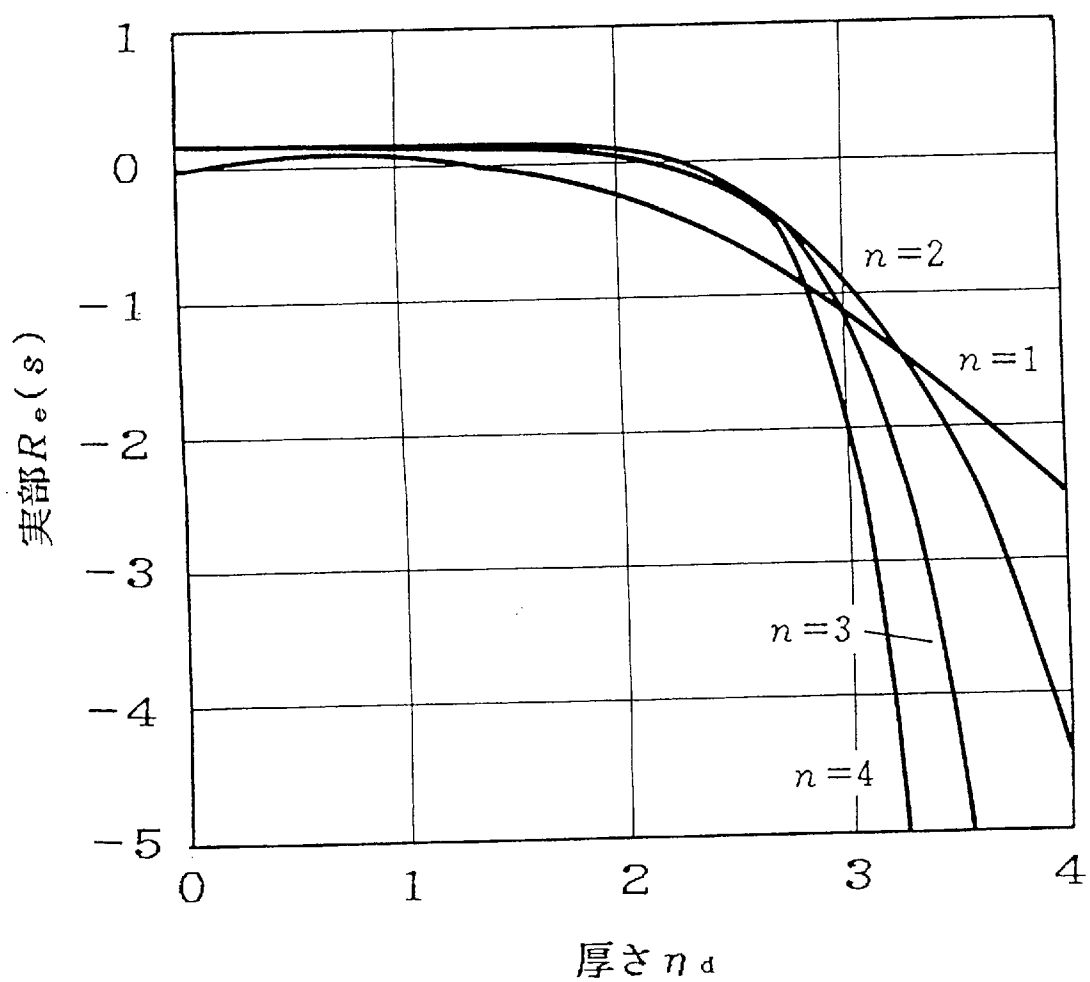


図2-16 中層大気の厚さ  $n_d$  に対する根  $s_1$  の実部の変化  
ただし,  $n_s=2$ ,  $l=0$  (垂直偏波)

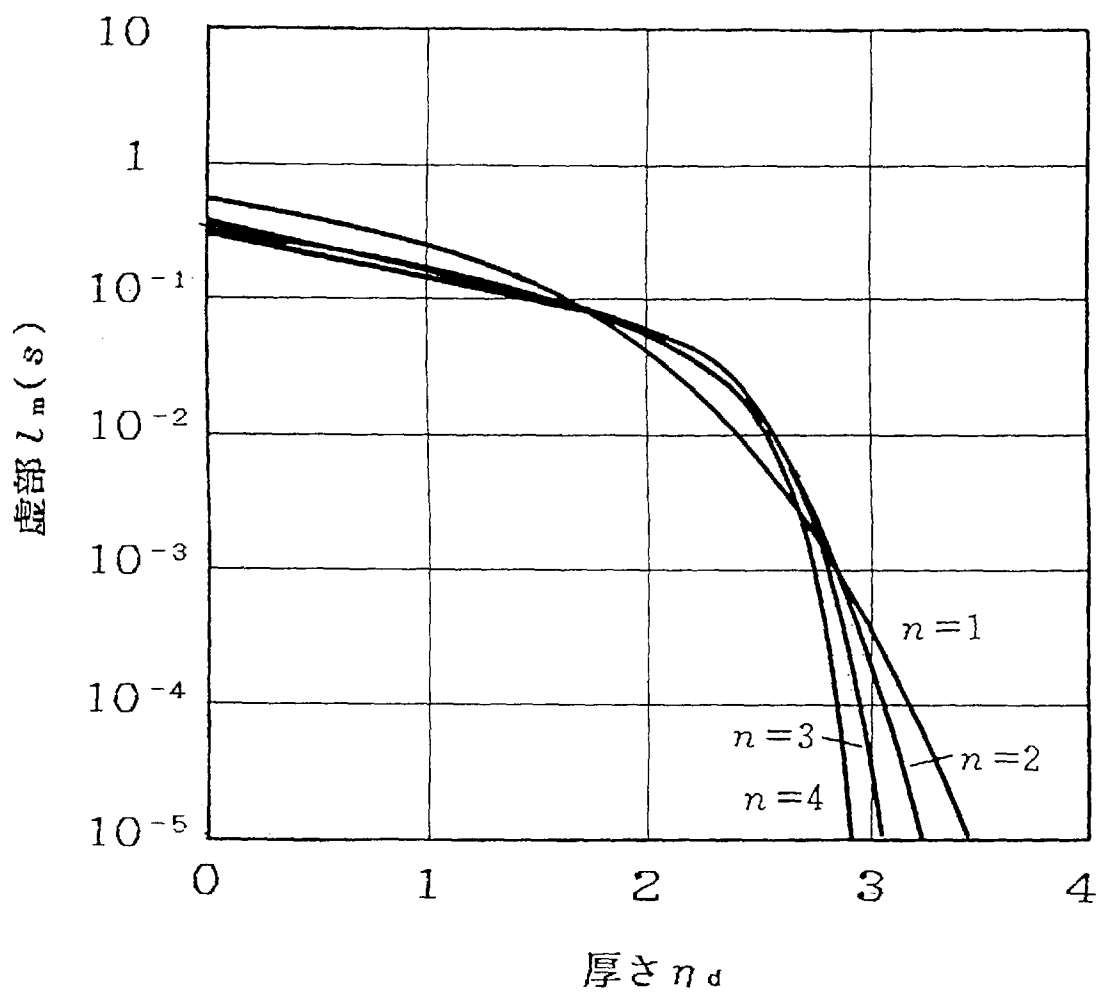


図2-17 中層大気の厚さ  $n_d$  に対する根  $s_1$  の虚部の変化  
ただし,  $n_s=2$ ,  $l=0$  (垂直偏波)

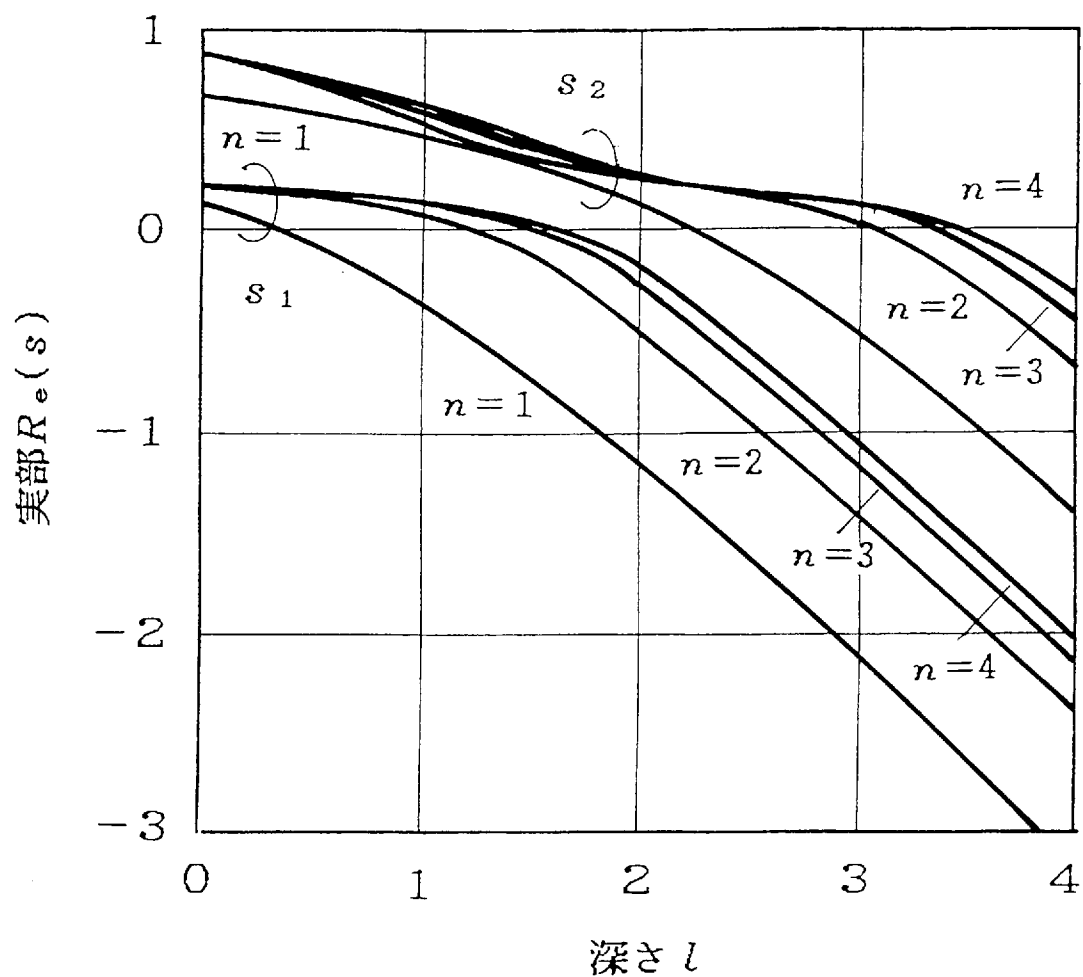


図2-18 下層大気の深さ  $l$  に対する根  $s_1$  と  $s_2$  の実部の変化  
ただし,  $n_s = n_d = 3$  (水平偏波)



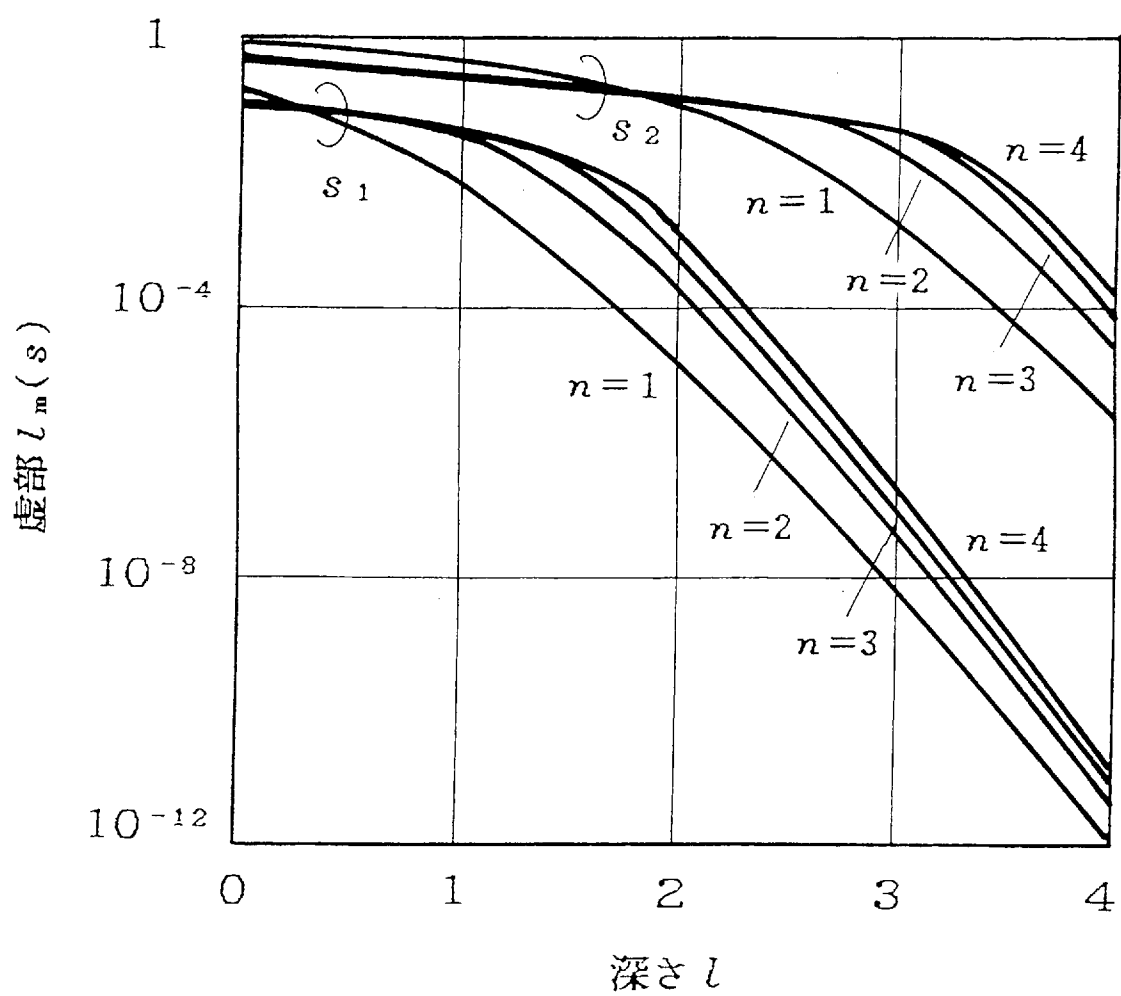


図2-19 下層大気の深さ  $l$  に対する根  $s_1$  と  $s_2$  の虚部の変化  
ただし,  $n_s = n_d = 3$  (水平偏波)

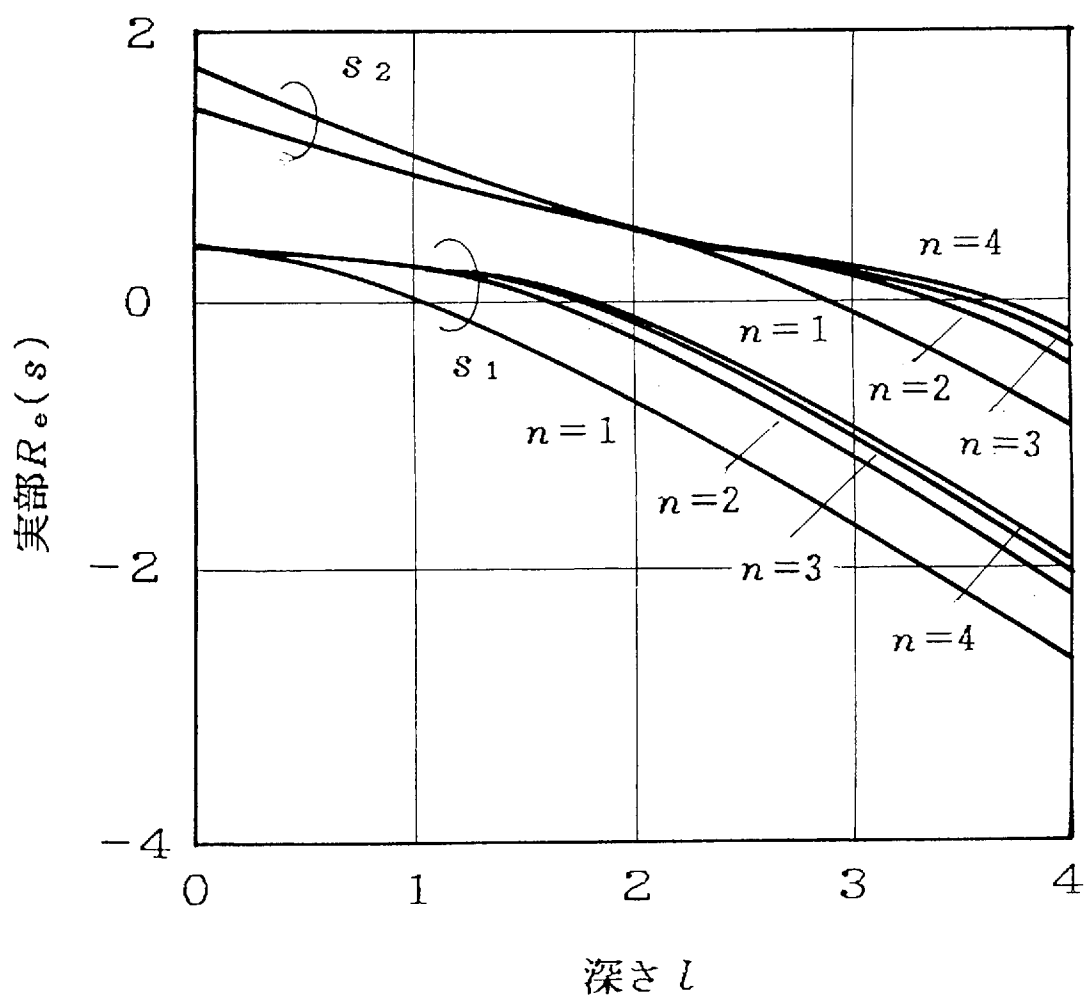


図2-20 下層大気の深さ  $l$  に対する根  $s_1$  と  $s_2$  の実部の変化  
ただし,  $n_s = n_d = 2$  (水平偏波)

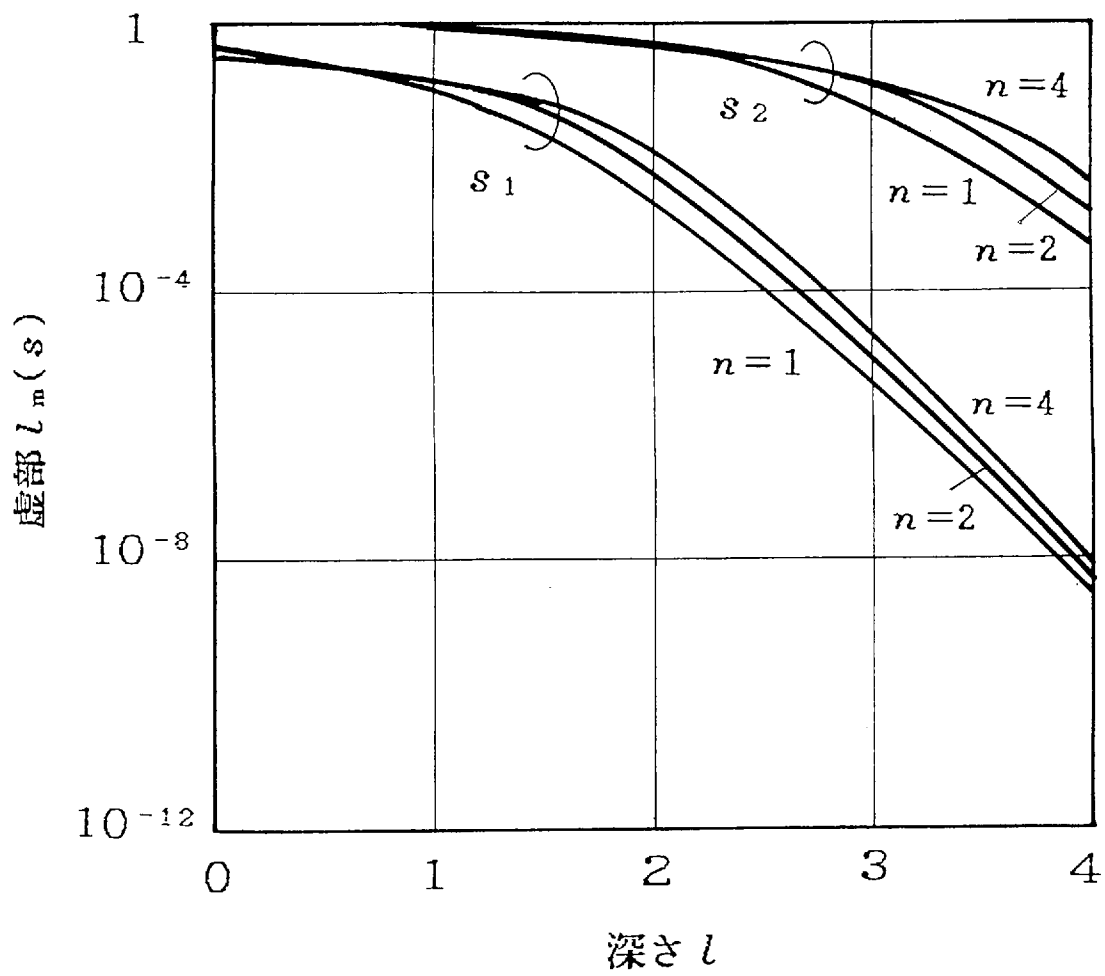


図2-21 下層大気の深さ  $l$  に対する根  $s_1$  と  $s_2$  の虚部の変化  
ただし,  $n_s = n_d = 2$  (水平偏波)

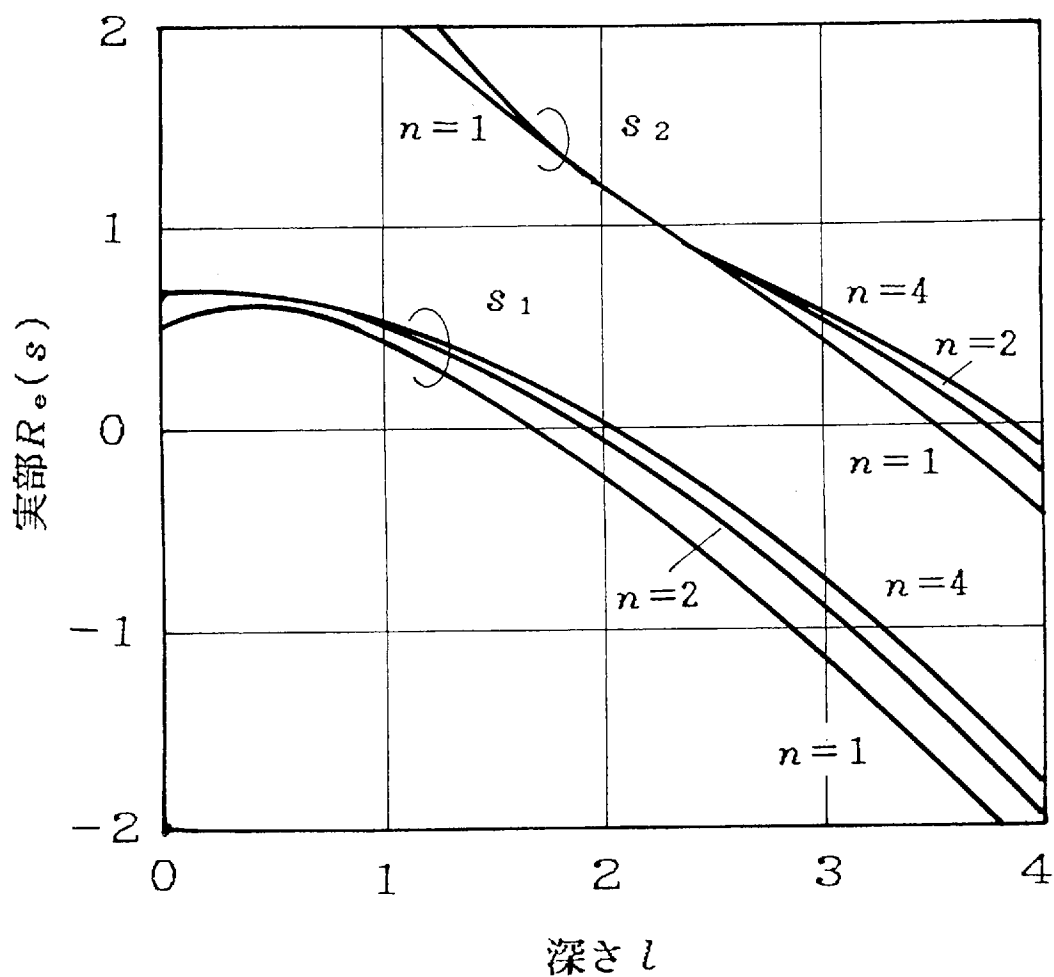


図2-22 下層大気の深さ  $l$  に対する根  $s_1$  と  $s_2$  の実部の変化  
ただし,  $n_s = n_d = 1$  (水平偏波)

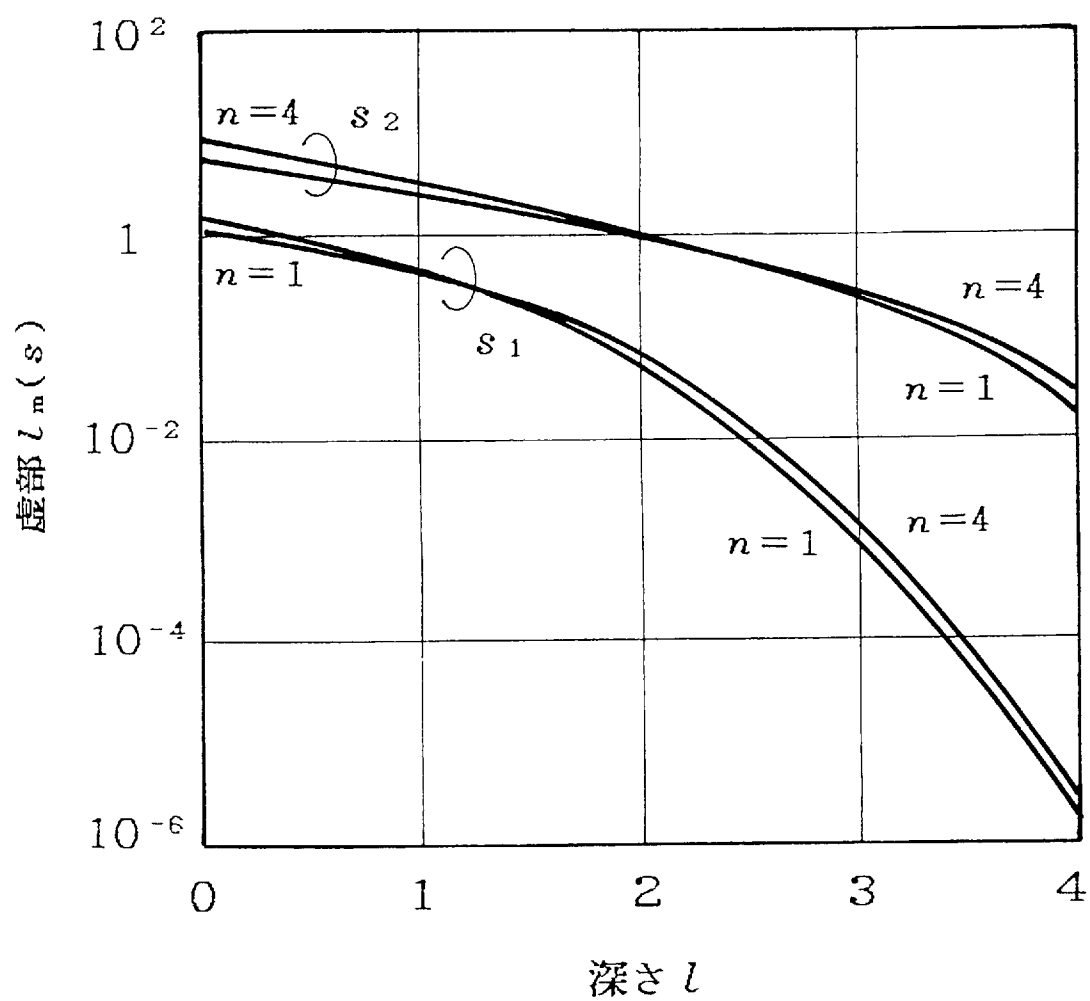


図2-23 下層大気の深さ  $l$  に対する根  $s_1$  と  $s_2$  の虚部の変化  
ただし,  $n_s = n_d = 1$  (水平偏波)

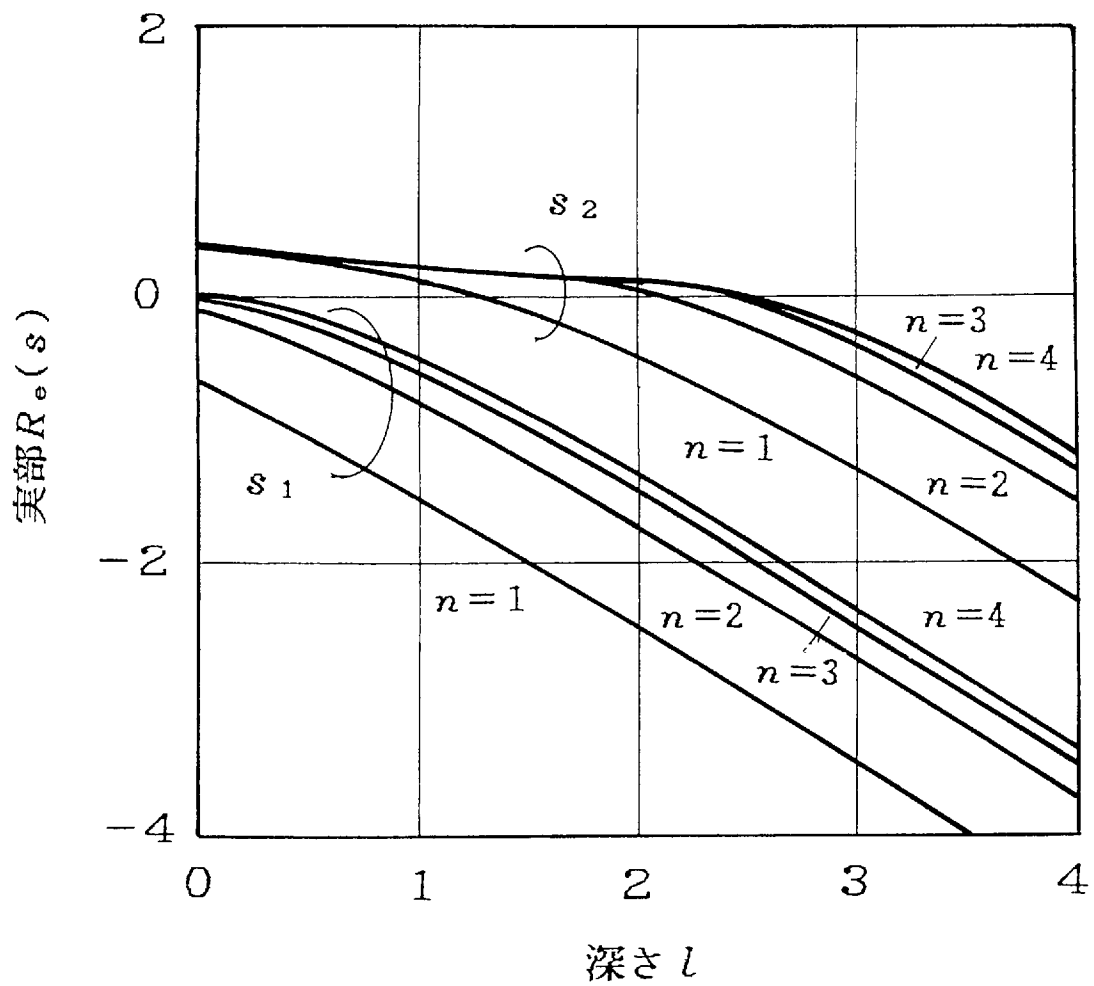


図2-24 下層大気の深さ  $l$  に対する根  $s_1$  と  $s_2$  の実部の変化  
ただし、 $n_s = n_d = 3$  (垂直偏波)

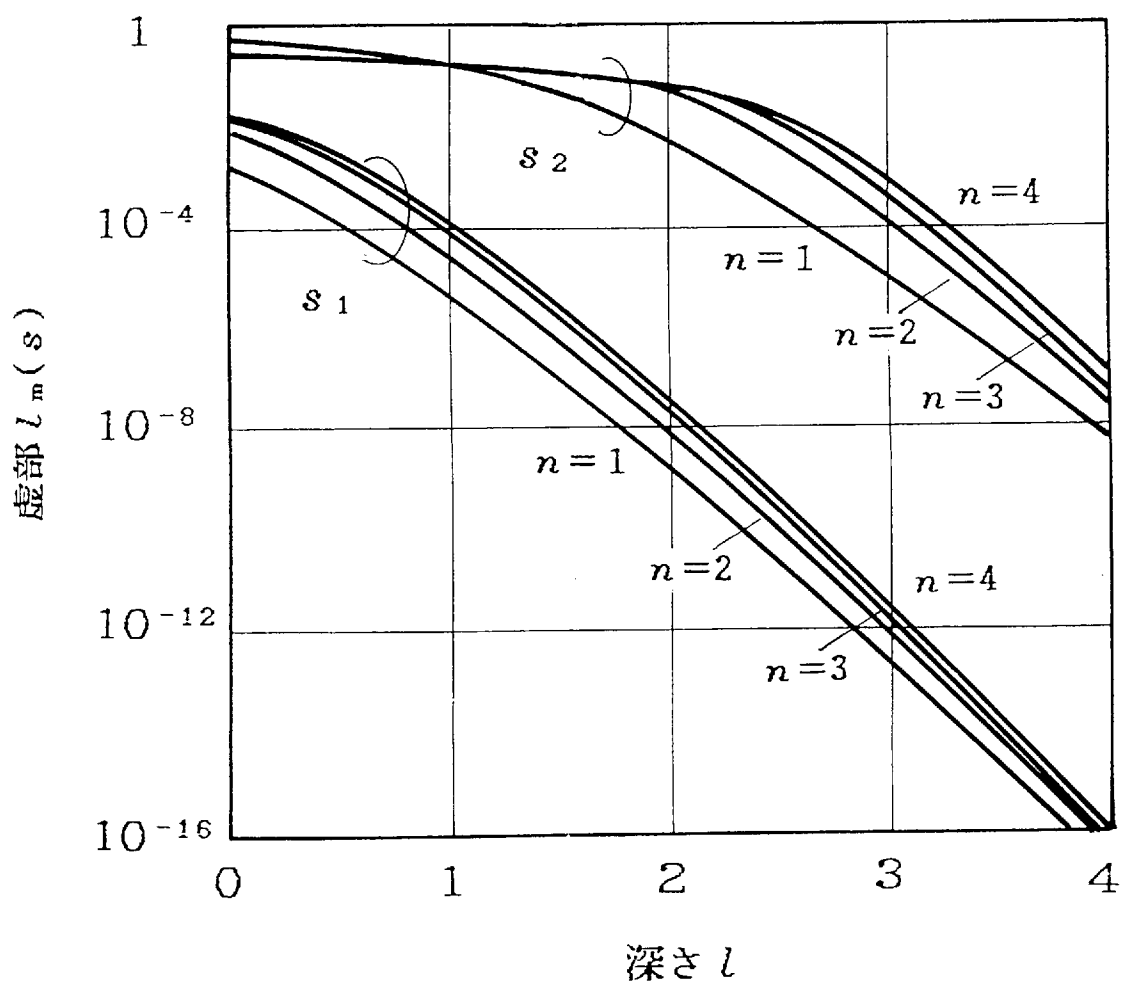


図2-25 下層大気の深さ  $l$  に対する根  $s_1$  と  $s_2$  の虚部の変化  
ただし,  $\eta_s = \eta_d = 3$  (垂直偏波)

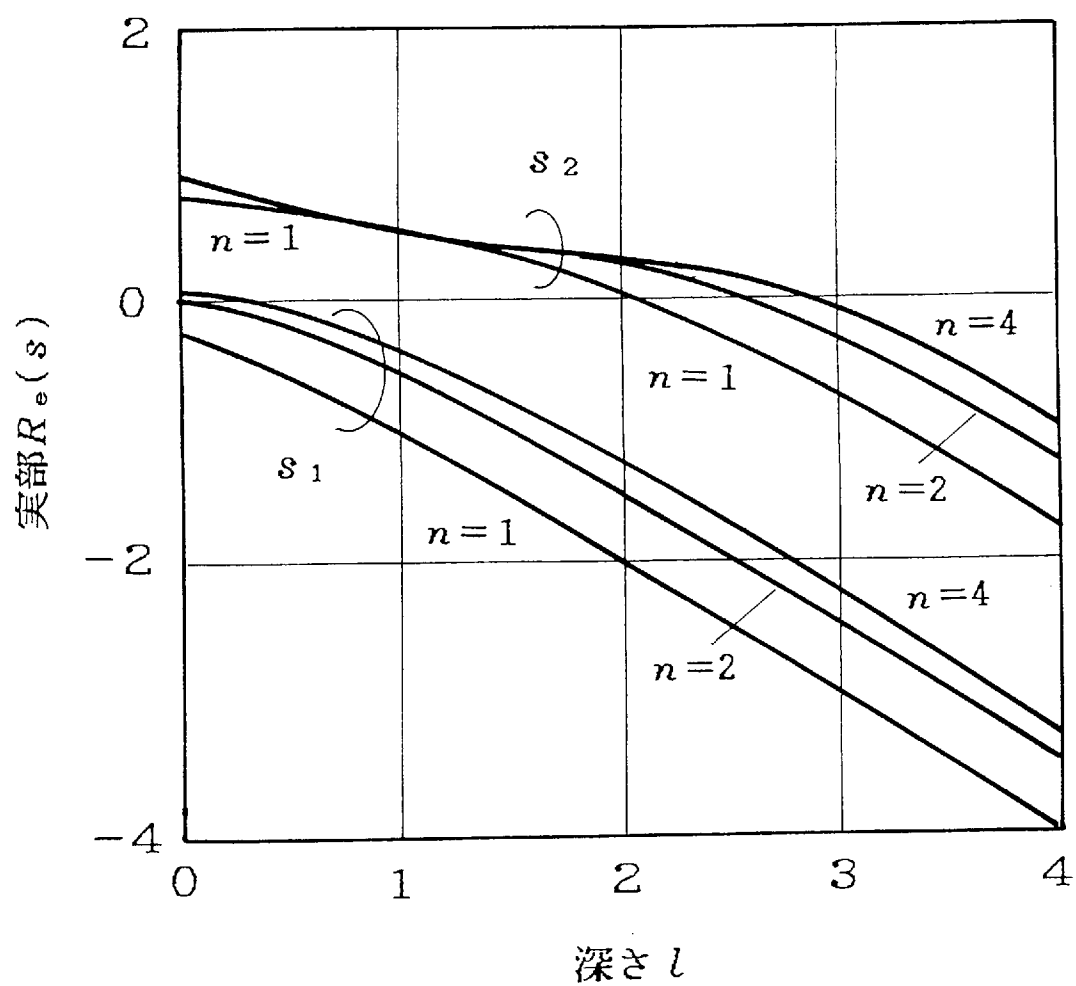


図2-26 下層大気の深さ  $l$  に対する根  $s_1$  と  $s_2$  の実部の変化  
ただし,  $\eta_s = \eta_d = 2$  (垂直偏波)



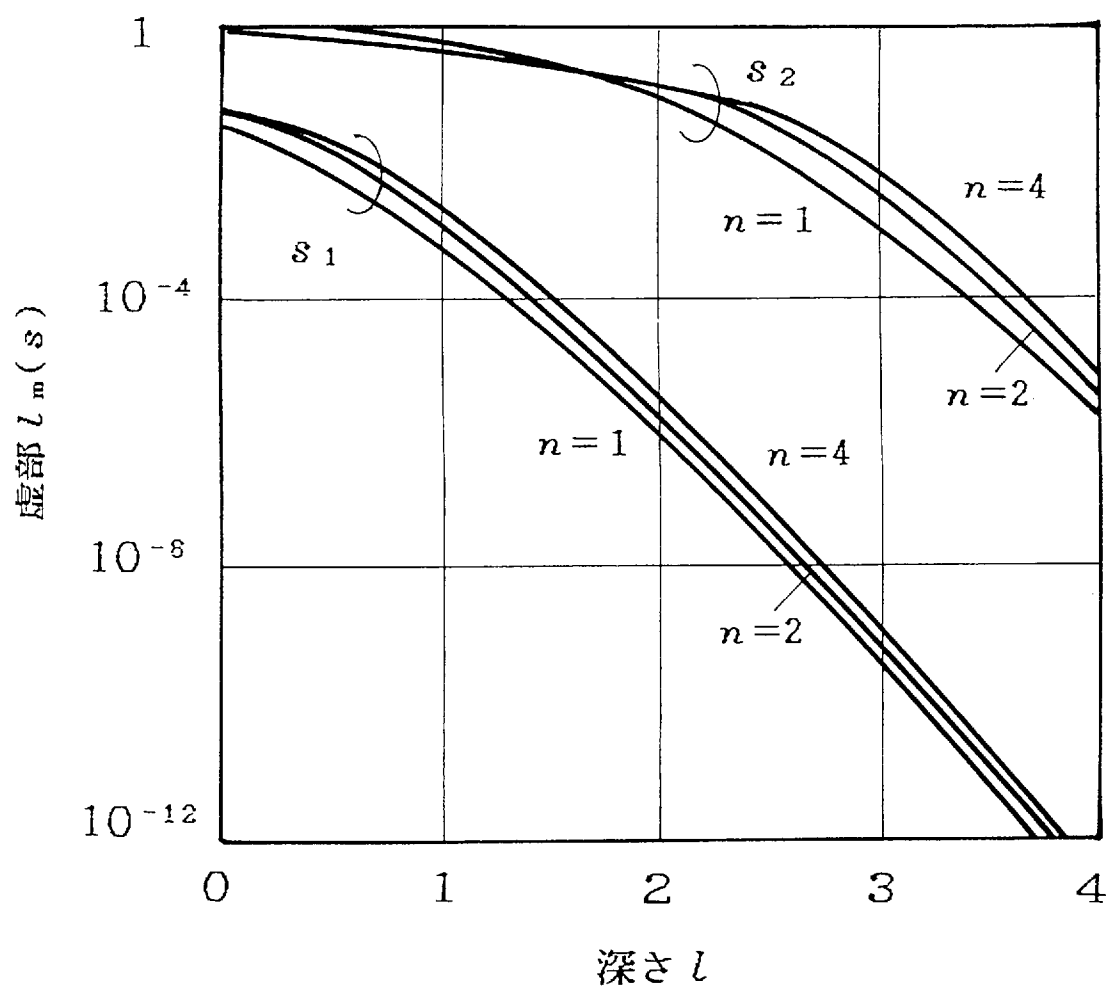


図2-27 下層大気の深さ  $l$  に対する根  $s_1$  と  $s_2$  の虚部の変化  
ただし,  $\eta_s = \eta_d = 2$  (垂直偏波)

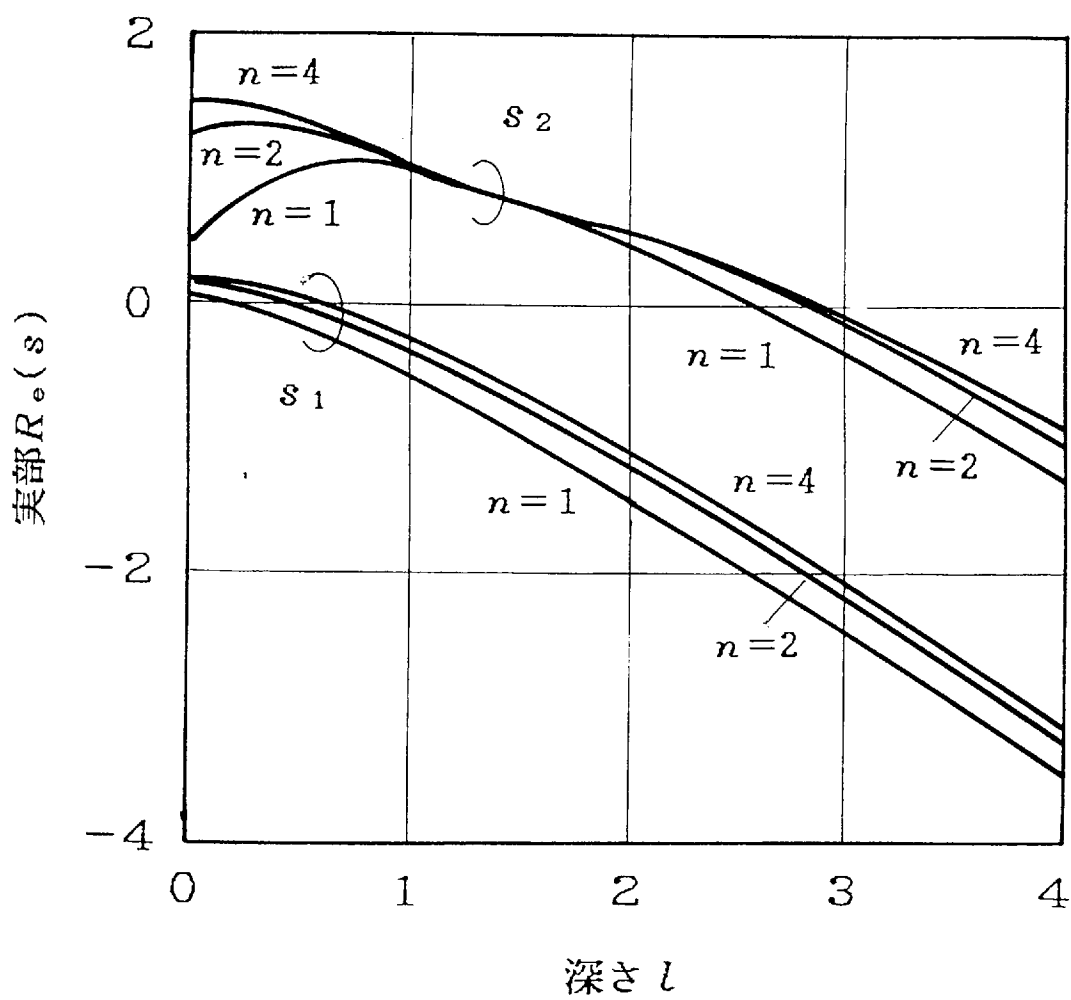


図2-28 下層大気の深さ  $l$  に対する根  $s_1$  と  $s_2$  の実部の変化  
ただし,  $n_s = n_d = 1$  (垂直偏波)

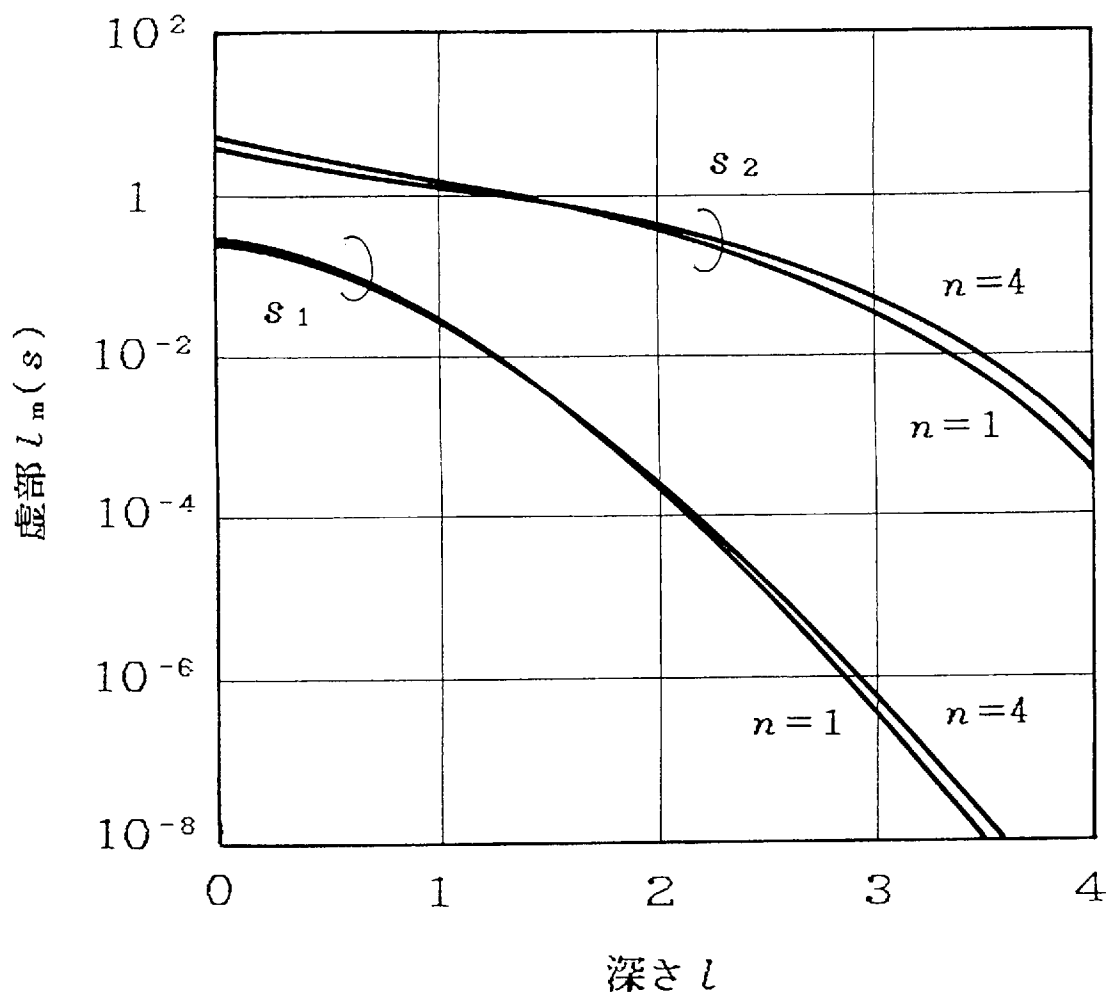


図2-29 下層大気の深さ  $l$  に対する根  $s_1$  と  $s_2$  の虚部の変化  
ただし,  $\eta_s = \eta_d = 1$  (垂直偏波)

## 2. 9 数 値 計 算 例 と そ の 検 討

高さに対して  $2n$  乗  $N$  プロファイルを含む逆転大気層モデルでのモード方程式の根が得られたことから、式(2-91)により受信電界強度を知ることができる。以下、大気層モデルを幾つか設定し、受信電界強度の高度分布、ダクト高と受信電界の極大値を与える高度との関係、受信電界強度のダクト高による変動特性ならびに空間分布の数値例を示し、その結果について考察する。

### 2. 9. 1 高度分布

地表面近くでの受信電界強度の高度分布を図 2-3 0 ～図 2-4 5 に示す。但し、これらの図のうち、図 2-3 0 ～図 2-3 7 は水平偏波の場合であり、図 2-3 8 ～図 2-4 5 は垂直偏波の場合である。また、図 2-3 0 ～図 2-3 3 および図 2-3 8 ～図 2-4 1 は中層の厚さ  $\eta_s = \eta_d = 3$ 、下層の深さ  $l = 2$  の大気プロファイルを採用しており、いずれも次数  $n = 1, 2, 3, 4$  の順に示した。図 2-3 4 ～図 2-3 7 および図 2-4 2 ～図 2-4 5 は下層の深さを  $l = 3$  と逆転大気層を増加させた場合であり、ここでも中層大気を規定する次数  $n = 1, 2, 3, 4$  の順に示してある。但し、これらの図は高度  $\eta$  の代りに地表面からの高度

$$Z = \eta + \eta_e \quad (2-94)$$

を、また送信高も  $\eta_1$  の代りに高度  $Z_t (= \eta_1 + \eta_e)$  を採用しており、以後もこれに従う。なお、図 2-3 0 ～図 2-4 5 の送信高は  $Z_t = 3$ 、受信距離を  $R = 15$  としている。

ここで、高さ  $\eta$  ならびに距離  $R$  はいずれも正規化した値であり、実際の場合との比較を容易にするためその一例を示すと、周波数  $f = 3 \text{ GHz}$  の場合、 $\eta = 1$  は  $z = 10.26 \text{ m}$ 、また距離  $R = 1$  は  $r = 13.23 \text{ km}$  に相当する。従って、図 2-3 0 等の

中層の厚さ  $\eta_s = \eta_d = 3$  は  $z_s = z_d = 30.8\text{m}$ ，また受信距離  $R = 15$  は  $r = 198.5\text{km}$  となる。

図 2-3 0 は第 1 モードから第 5 モードまでの合成電界の高度分布と第 1 モードおよび第 2 モードからなり，電界レベルの低い高次モードは図中に現われない。第 1 モードは地表近くで高レベルを示し，高度の増大とともに急速に減衰する。図 2-3 0 では地表面近くの第 2 モードの電界強度が第 1 モードのそれと比べて小さく，高度が増すと逆転する。このことは第 2 モードがまだトラップされていないことを示している。次数  $n=1$  とした図 2-3 0 と他の  $n$  での高度分布，つまり図 2-3 1 ～図 2-3 3 とを比べると，最大電界の  $n$  による差異は 1dB 以内であり，次数  $n=1, 2, 3, 4$  の順にわずかに高い。しかし，高度が増すと  $n=1, 2, 3, 4$  の順で高度に対する第 1 モードの通減率は弱まる。これはモード方程式の根  $s_1$  の相異による。第 2 モードの次数  $n$  による相異は， $n=1$  で電界レベルが最も高く， $n=1, 2, 3, 4$  の順に低レベルである。

図 2-3 4 は下層の深さ  $l=3$  と逆転大気層を増加させた場合の高度分布であり，他のパラメータは図 2-3 0 と同一とした。高度が高くなると，第 1 モードは図 2-3 0 に比べてより急激な減衰特性を示す。送信高  $Z_t=3$  とした図 2-3 4 での第 2 モードの電界レベルはほとんどの高度で第 1 モードより卓越し，最大電界の差は約 4.8 dB である。しかし，送信高  $Z_t=1$  としたときの高度分布では第 1 モードの最大電界が第 2 モードのそれより約 5.2dB 大きな値を示す。

図 2-3 4 と高次プロファイルの高度分布では第 1 モードの  $n$  による差異はほとんどなくなり，高度が高くなると指数関数的な減衰特性を示す。第 2 モードの電界レベルは  $n=1, 2, 3, 4$  の順に低レベルとなる。しかし，送受信高を変えると，レベル順位は変動する。

垂直偏波の高度分布について検討を加える。垂直偏波の場合，地表面での境界条件は  $dU_0/d\eta \approx 0$  であり，従って各モードとも地表面  $\eta = -\eta_e$  での受信電界はほぼ極大値を示す。図 2-3 8 は次数  $n=1$  の場合であり，ここでも合成電界は

第1モードから第5モードまでを重畳しているが、第2モードの高度分布にほとんど一致しており、第2モードが他のモードに比べて卓越していることがわかる。高次のNプロファイルの高度分布と比較すると、図2-38に比べ高次になるに従って合成電界と第2モードとの差が大きくなり、合成電界への寄与が第2モードの外に第1モードも加わっていることがわかる。また、次数 $n=1, 2, 3, 4$ の順に第2モードの極大電界を与える高度が地表面からしだいに離れていき、中層の厚さ $\eta_s=\eta_d=3$ 、下層の深さ $l=2$ でのNプロファイル大気では次数 $n$ による受信電界の相異が明らかである。

図2-42～図2-45は下層の深さを $l=3$ と増した場合の次数 $n=1, 2, 3, 4$ に対する高度分布であるが、この高度内での最大電界は次数 $n$ に依存しておらず、またこのときの高度もほとんど $n$ に関係していない。但し、高高度で第3モードの合成電界への影響の有無が次数 $n$ によって異なる。

## 2.9.2 極大電界高度

前節の水平偏波のところで述べたように、送信高が高度分布へ影響を与えることから、ダクト高 $\eta_D(=\eta_d+l)$ と各モードの最大(あるいは極大)電界を与える高度 $\eta_p$ 、つまり $d|U_0|/d\eta=0$ より得られる電界強度の極大点との関係を水平偏波について図2-46～図2-51に、垂直偏波として図2-52～図2-55に示した。但し、これらの図の極大高度は高度変換 $Z_p=\eta_p+\eta_s$ を用いて地表面からの極大高度 $Z_p$ で描いてある。ここでも中層の厚さとして $\eta_s=2, 3$ の2種類の大気プロファイルを採用しており、図2-46～図2-48および図2-52、図2-53は中層の厚さ $\eta_s=2$ 、図2-49～図2-51および図2-54、図2-55は $\eta_s=3$ としている。図中 $\eta_D \leq \eta_s$ では $\eta_d=\eta_D, l=0$ であり、一方 $\eta_D \geq \eta_s$ では $\eta_d=\eta_s$ に固定し、下層の深さ $l$ の変化となる。従って、 $\eta_D \geq \eta_s$ の場合中層大気下に修正屈折率傾度 $\alpha^3=-1$ の逆転層がある場合に相当する。受信距離は $R=15$ として極大値 $Z_p$ を得たが、送信高 $Z_t$ および $R$ は任意でよい。

水平偏波について検討する．ダクト高 $\eta_D$ が低い場合は高度に対して単調増加な高度分布を示し，各モードとも極大点 $Z_p$ は存在しないが，ダクト高 $\eta_D$ の増大とともに極大点 $Z_p$ が現われる．しかし，中層大気プロファイルの次数 $n$ によって極大点 $Z_p$ の発生状態は異なり，ダクト高の増大に対して大きな次数 $n$ ほど極大点の出現は早まる．これは屈折率傾度 $\alpha^3 \approx 0$ 付近の大気層の厚さに依存するためである．さらに，ダクト高が増大していくと第 $i$ モードの極大点 $Z_p$ は次数 $n$ に関係なく一定値 $Z_{p_i}(=\eta_{p_i} + \eta_e, i=1, 2, \dots)$ に漸近する．これらの一定値 $Z_{p_i}$ は第1モードでは $Z_{p_1}=1.32$ ，第2モードでは $Z_{p_2}=0.82, 3.07$ の2点，そして第3モードでは $Z_{p_3}=0.70, 2.25, 4.50$ の3点である．つまり，これらの $Z_{p_i}$ は中層大気の厚さ $\eta_s + \eta_d$ によらず，ダクト高 $\eta_D$ だけで決まる．従って， $Z_{p_i}$ に影響を与えるパラメータは下層大気の屈折率傾度だけとなり，傾度の減少とともに $Z_{p_i}$ はより低い高度に移ることになる．極大点 $Z_{p_i}$ に対応するダクト高 $\eta_D$ からのモードは高高度で指数関数的に減衰する高度分布となり，このダクト高でトラッピングモードとなる．また，このダクト高はモード方程式の根 $s_1, s_2, \dots$ のふるまいとも一致する．つまり，すべての $n$ に対して根 $s_1, s_2, \dots$ の実部虚部とも急激に変化しだす下層の厚さがこのダクト高に対応する．

図2-46～図2-55はいずれも極大受信電界高度とダクト高の関係を示したものであるが，送受の双対性より送信高にも適用できる．そこで，図2-34を例にとり高度分布特性を調べると，この場合送信高 $Z_t=3$ ，一方第2モードの極大高度 $Z_{p_2}=3.07$ であることから，第2モードの発生に有効な送信高となり，第1モードの電界強度より第2モードが卓越する．従って，送信高 $Z_t=1$ を採用すれば第1モードの極大点 $Z_{p_1}=1.32$ に近くなり第1モードが卓越することになる．

垂直偏波の場合，各モードとも地表面で受信電界はほぼ極大となり，これが地表面に最も近い極大高度に相当する．そこで，図2-52～図2-55ではこの極大高度を省略してあり，従って第1モードについても省いた．水平偏波と

同様トラッピング・モード時の極大高度 $Z_{pi}$ は第2モードでは $Z_{p2}=2.22$ ，また第3モードでは $Z_{p3}=1.57, 3.80$ であり，水平偏波に比べ垂直偏波での $Z_{pi}$ は同一モードに対してより低い高度に現われる．

次数 $n$ の極大高度への影響は中層の厚さ $\eta_s=2, 3$ を比較することより明らかである．つまり，屈折率傾度 $\alpha^3 \approx 0$ 付近のNプロファイルの厚みが大きいほど次数 $n$ による極大電界高度の差異が現われ，特にダクト高の低いときに顕著であり，ダクト高の増大によって次数 $n$ に関係なく急速に $Z_{pi}$ に漸近する．

### 2.9.3 ダクト高による受信電界変動

ダクト高 $\eta_D$ に対する $2n$ 乗Nプロファイルでの受信電界強度の変動特性を図2-56～図2-61に示す．但し，図2-56～図2-59は水平偏波の場合であり，図2-60および図2-61は垂直偏波の変動特性である．また，図2-56，図2-57および図2-60は中層の厚さ $\eta_s=3$ ，一方図2-58，図2-59および図2-61は $\eta_s=2$ の大気プロファイルを採用した．但し，図中 $\eta_D \leq \eta_s$ では $\eta_d = \eta_D$ ， $l=0$ であり，一方 $\eta_D \geq \eta_s$ では $\eta_d = \eta_s$ に固定し，下層の深さ $l$ の変化となる．従って， $\eta_D \geq \eta_s$ の場合中層大気下に修正屈折率傾度 $\alpha^3 = -1$ の逆転層がある場合に相当する．送受信高としては図2-56，図2-58は地表面から $Z_t=Z_r=3$ に配し，図2-57，図2-59は $Z_t=Z_r=1$ ，垂直偏波の図2-60，図2-61はいずれも $Z_t=Z_r=2$ としている．なお，いずれの図も受信距離は $R=15$ であり，受信電界は第1モードから第5モードまでの合成電界で与え，自由空間値に対する相対値で表している．

これらの変動特性を送受信高 $Z_t=Z_r=3$ の図2-56を用いて考察する．

図2-56よりダクト高が低い場合には $2n$ 乗Nプロファイルの次数 $n$ が大きいほど受信レベルが高いことがわかる．これは $n$ によるモード方程式の根 $s_1$ の相異から生ずる．図2-19の下層の厚さ $l=0$ （すなわち，ダクト高 $\eta_D=3$ ）での根 $s_1$ の虚部は $n=1$ で最も大きく， $n=1, 2, 3, 4$ の順にそれぞれ $\text{Im}(s_1)=0.134$ ，



0.127, 0.106, 0.096である．さらに，ダクト高が低くなると，根の虚部はいずれも大きくなり， $n$ 間の差は広がる．図2-1からも明らかなように，このことは大きな $n$ ほど修正屈折率傾度 $\alpha^3 \approx 0$ 付近の均一に近い大気層が厚いことによる．従って，中層の厚さ $\eta_s$ が薄いほど， $n$ による根 $s_1$ の差は少なくなり，受信レベルの差も縮まる．また，図2-4 9よりダクト高 $\eta_D \approx 2$ での極大電界高度は $n=2, 3, 4$ で存在し， $n=1$ ではまだ現われないが，地表近傍を除けばこのダクト高での高度分布はいずれの $n$ でもほぼ一定値を示し， $n=1, 2, 3, 4$ の順に高レベルである．このことから，ダクト高 $\eta_D < 3$ での $n$ による受信レベルの大小関係は送受信高に影響されない．但し，送受信点が地表近傍にある場合には， $n$ による受信レベルの差は減少する．

ダクト高の増大とともに，図2-5 6では2乗Nプロファイルでの受信レベルが他の高次プロファイルでのそれより大きな値を示している．しかし，図2-4 9からわかるように， $n=1$ での極大電界高度は急速に $Z_{p1}$ に漸近しだすことから， $n=1, 2, 3, 4$ による受信レベルの大小関係は送受信高に依存し，特に $n=1$ と他の $n$ との間の受信レベルはさまざまに変動する．従って，ダクト高増大にともなうモード成長時での受信電界強度は2乗Nプロファイルの次数 $n$ によって非常に異なることになる．

ダクト高が増していき， $\eta_D \approx 4$ 付近で第1モードからの受信電界強度が最大となる．つまり，最大受信電界(第1モード)を与えるダクト高は $n=1, 2, 3, 4$ の順に $\eta_D=3.91, 4.38, 4.61, 4.72$ であり，しかも受信電界強度に大きな差異はない．これらのモードはいずれもトラッピング・モードである．さらに， $\eta_D$ が増すと第1モードから得られる受信電界は緩やかに減少しながら一定レベルに近づく．第1モードの極大点 $Z_{p1}$ より高い受信高ではダクト高の増大とともに高度に対する逓減率が大きくなり，しだいにその逓減率が一定値に近づくためである．

ダクト高がさらに大きくなると，すなわち $\eta_D \approx 5$ 近くで伝搬に寄与するモードが第1モードの外に第2モードも加わり，互いに干渉するようになる．ここで第

1モードと第2モードとから得られる受信電界強度が同レベルとなるダクト高を示すと、 $n=1, 2, 3, 4$ の順に $\eta_D=5.15, 5.81, 6.09, 6.21$ であり、次数 $n$ によるダクト高の違いがわかる。ダクト高がこれより大きくなると第1モードより第2モードからの電界強度が卓越する。図2-56ではダクト高 $\eta_D \approx 7$ での受信レベルが $n$ にかかわらずなくほぼ同じ値を示している。送受信高 $Z_t=Z_r=3$ が第2モードの極大点 $Z_{p2}=3.02$ に近いため、 $n$ に無関係にほぼ同一受信電界となる。そこで、送信点あるいは受信点の一方でも高度 $Z=3$ から離れた高度に配置すれば、次数 $n$ によって受信電界に差を生ずることになる。

図2-57は図2-56に対して送受信高を $Z_t=Z_r=1$ と下げた場合であり、この送受信高が第1モードの $Z_{p1}(=1.32)$ に近く、ダクト高 $\eta_D \approx 5$ での電界レベルが図2-56に比べて約10dB上昇する。つまり、この送受信高では第1モードの寄与が大きいことになる。図2-56、図2-57に対して図2-58および図2-59はいずれも中層大気の厚さを $\eta_s=\eta_d=2$ と薄くした場合であり、次数 $n$ によるレベル差の減少がみられる。但し、各モードの安定時、つまりトラッピング状態での電界レベルは中層の厚さではなくダクト高に依存していることがわかる。

図2-56～図2-59の変動特性は第1モードから第5モードまでの合成電界で与えたが、送受信点がこの逆転層内にある場合は第1モードと第2モードからの受信電界だけでほぼ決定される。なお、この変動特性は図2-60、図2-61の垂直偏波の場合も同じ傾向を示すが、前述したように水平偏波でのダクト高より少ない厚さで変動特性が現われる。

以上のように、第1モードの成長時、第1モードの安定時、第2モードとの干渉時、第2モードの卓越時とダクト高の増大とともに受信電界が次数 $n$ によって異なる変動を示す。特に、電界レベルが急激に増大するモード成長時でのダクト高は次数 $n$ によって異なり、屈折率傾度ゼロ付近の大気層による受信電界への影響が顕著である。このことから屈折率傾度ゼロ付近のNプロファイルとダ

クト高の変動によって種々のフェージングの発生が予想できる。

#### 2.9.4 空間分布

図2-6 2～図2-8 1は2 $n$ 乗Nプロファイルの次数 $n$ に対する相対受信電界強度の相異を空間分布で示したものであり、ここでも第1モードから第5モードまでの合成電界としている。但し、図2-6 2～図2-7 3は水平偏波の場合であり、これ以降は垂直偏波の空間分布である。また、これらは中層の厚さ $\eta_s$ 、 $\eta_d$ ならびに下層の深さ $l$ を変えて描いており、図2-6 2～図2-6 5は $\eta_s=\eta_d=l=3$ とし、それぞれ $n=1, 2, 3, 4$ の場合に対応する。但し、送信高は地表面からの位置 $Z_t=3$ に置いてある。同様に、図2-6 6～図2-6 9は $\eta_s=\eta_d=3, l=2, Z_t=2$ 、図2-7 0～図2-7 3は $\eta_s=\eta_d=2, l=3, Z_t=3$ 、図2-7 4～図2-7 7は $\eta_s=\eta_d=l=2, Z_t=2$ そして図2-7 8～図2-8 1は $\eta_s=\eta_d=2, l=1, Z_t=1$ の場合であり、いずれも次数 $n=1, 2, 3, 4$ に対応する。また、図中の実線は受信電界強度の等レベル線であり、5dB間隔に描いている。

図2-6 2～図2-6 5は図2-5 6のダクト高 $\eta_D=6$ での受信電界を空間分布の形で示したものである。これらの空間分布では次数 $n=1, 2, 3, 4$ のいずれの大気内も受信電界の周期性変動が現われており、しかも次数 $n$ が大きいほど周期が長くなっていることがわかる。第1モードと第2モードを誘起させる根 $s_1$ および $s_2$ を用いると、 $n=1, 2, 3, 4$ の順に $\text{Re}(s_1-s_2)=-1.660, -1.474, -1.292, -1.190$ であり、図2-6 2～図2-6 5より距離に関する周期は $R=3.71, 4.26, 4.86, 5.28$ である。一方、式(2-92)から距離に関する変動項は $\cos R \cdot \text{Re}(s_1-s_2)$ であり、この受信電界変動が第1モードと第2モードの干渉による周期性変動になる。高度に対する変動については、次数 $n$ の増大とともに波のトラップが下層から中層領域へと移っていく。図2-6 6～図2-6 9の比較から明らかなように、さらに下層の厚さ $l$ が薄くなるとモード干渉による受信電界の変動が上層大気へと上昇していき、下層の受信電界は単一モード(第1モ

ード)が支配的となる。その結果、距離方向の変動は減少する。なお、  
 図2-70～図2-73でのダクト高は図2-66～図2-69でのそれと同一であるが、図2-70～図2-73の空間分布は次数 $n$ に関係なく距離に対して周期性変動を示している。これは屈折率傾度 $\alpha^3 \approx 0$ 付近のNプロファイルよりダクト高 $\eta_d + l$ の影響を強く受けることによる。

垂直偏波での次数 $n$ に対する空間分布は図2-74～図2-77と図2-78～図2-81とに示した。前者は第1モードと第2モードとの干渉分布であり、後者はダクト高を浅くした場合で第1モードだけが伝搬に寄与することになる。

ここで、 $2n$ 乗Nプロファイルの次数 $n$ による大気プロファイルの相異を修正屈折率差 $\Delta N$ で表すと、式(2-62)より

$$\Delta N = \frac{\gamma_0 H \eta_s (n_2 - n_1)}{2n_1 n_2} \quad (2-95)$$

となる。但し、 $n_1$ および $n_2$  ( $n_2 > n_1$ )は異なるNプロファイルの次数である。周波数を $f=3\text{GHz}$ 、中層の厚さを $\eta_s=3$ とすると2乗Nプロファイル( $n_1=1$ )と4乗Nプロファイル( $n_2=2$ )との差は $\Delta N=0.907\text{NU}$ 、また2乗Nプロファイル( $n_1=1$ )と8乗Nプロファイル( $n_2=4$ )の場合は $\Delta N=1.361\text{NU}$ である。従って、 $2n$ 乗Nプロファイルの次数 $n$ による遠距離での受信電界の変動はわずかな修正屈折率差 $\Delta N$ で生ずることになる。

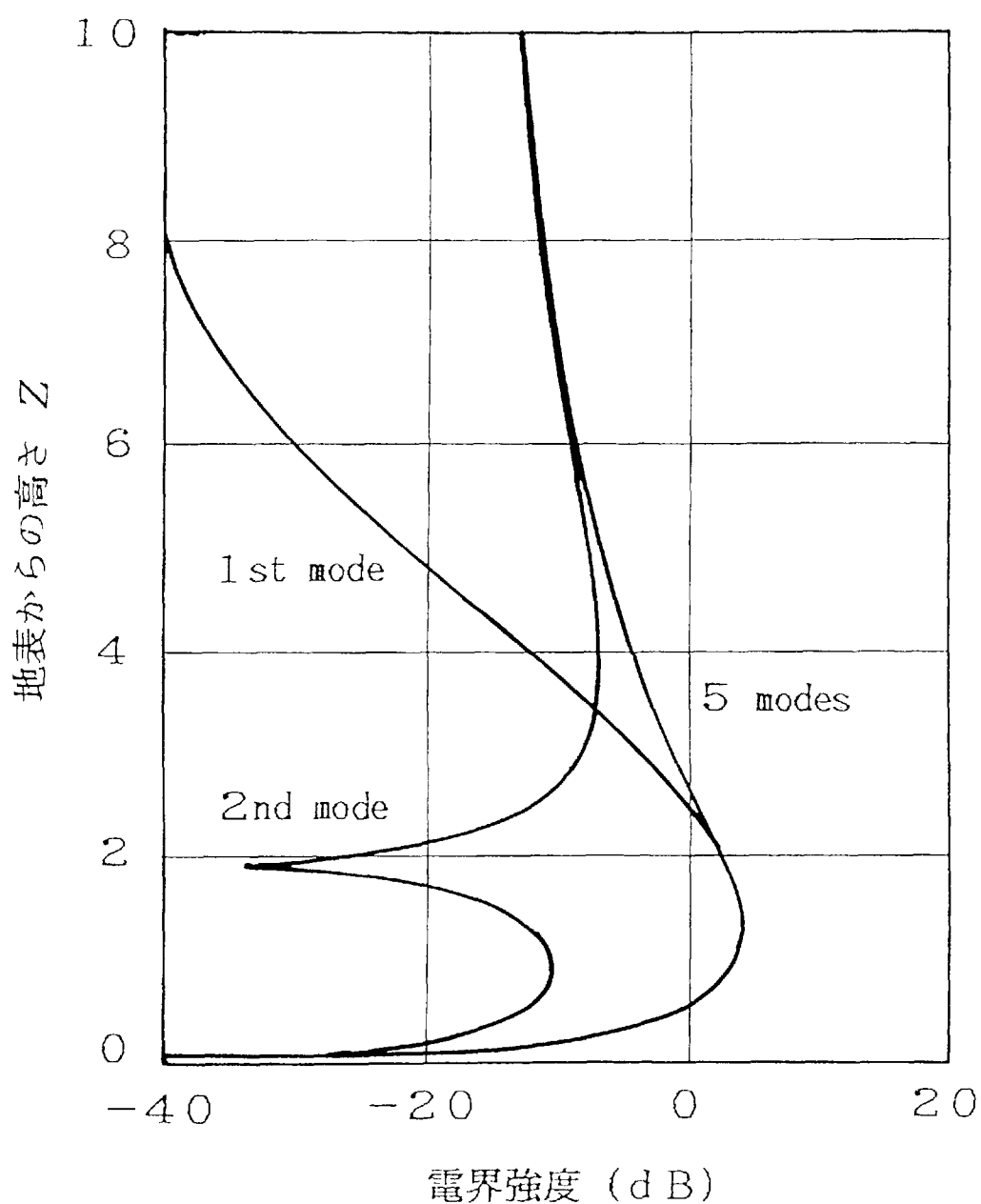


図2-30 相対受信電界強度の高度分布(2乗Nプロファイル)

ただし,  $n_s = n_d = 3$ ,  $l = 2$ , 送信高  $Z_t = 3$

受信距離  $R = 15$  (水平偏波)

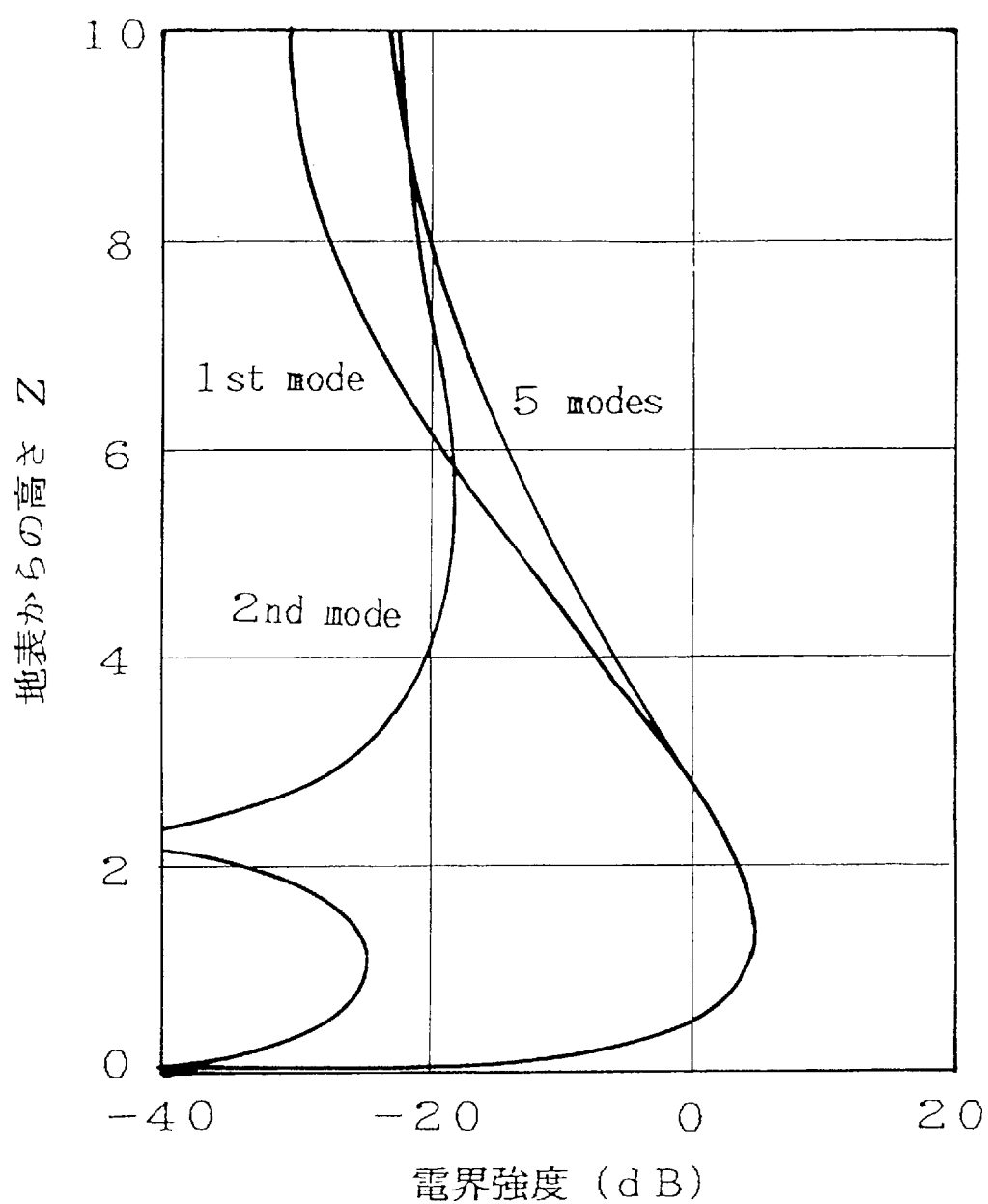


図2-31 相対受信電界強度の高度分布(4乗Nプロファイル)

ただし,  $n_s = n_d = 3$ ,  $l = 2$ , 送信高  $Z_t = 3$   
 受信距離  $R = 15$  (水平偏波)

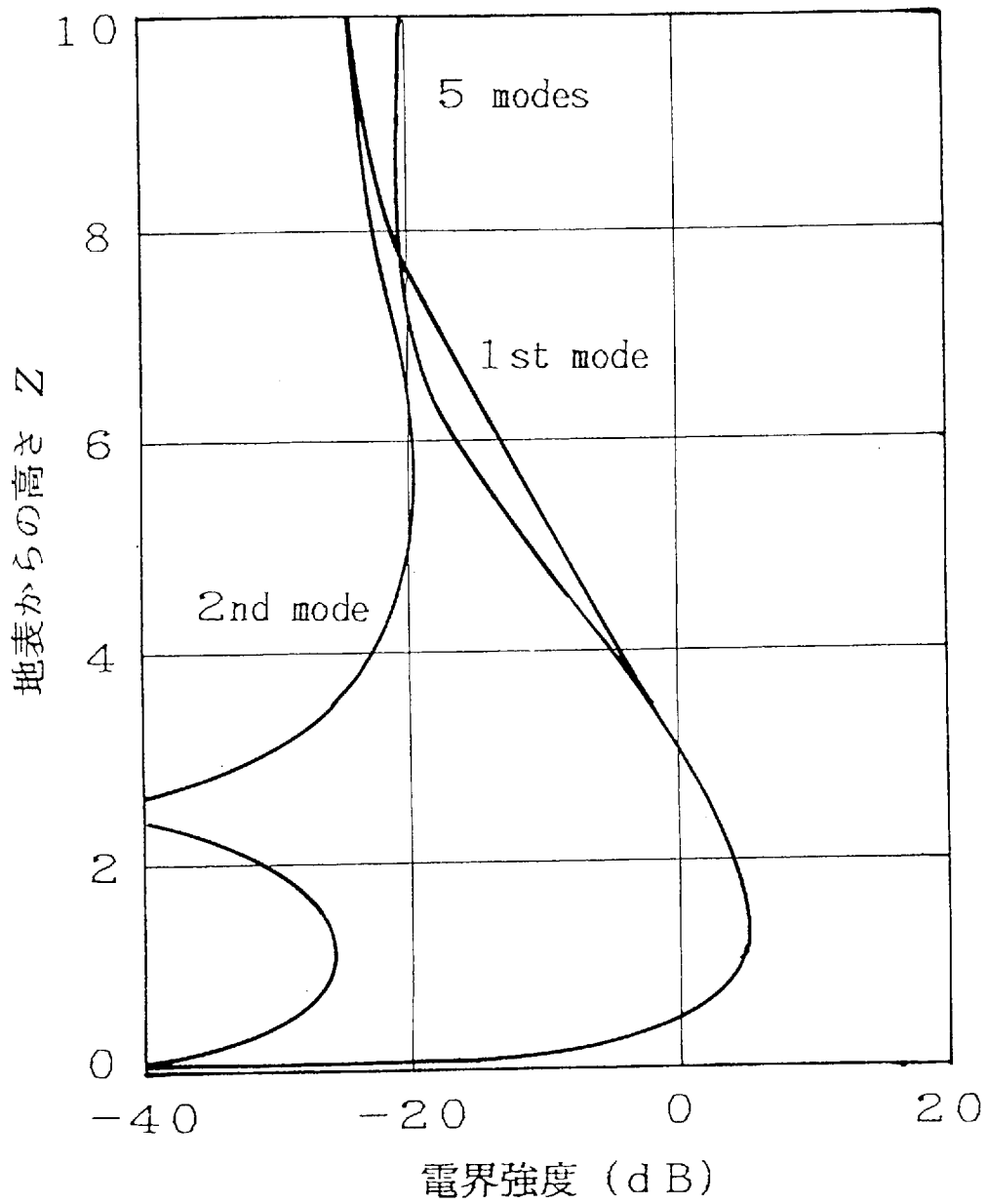


図2-32 相対受信電界強度の高度分布(6乗Nプロファイル)

ただし,  $n_s = n_d = 3$ ,  $l = 2$ , 送信高  $Z_t = 3$

受信距離  $R = 15$  (水平偏波)

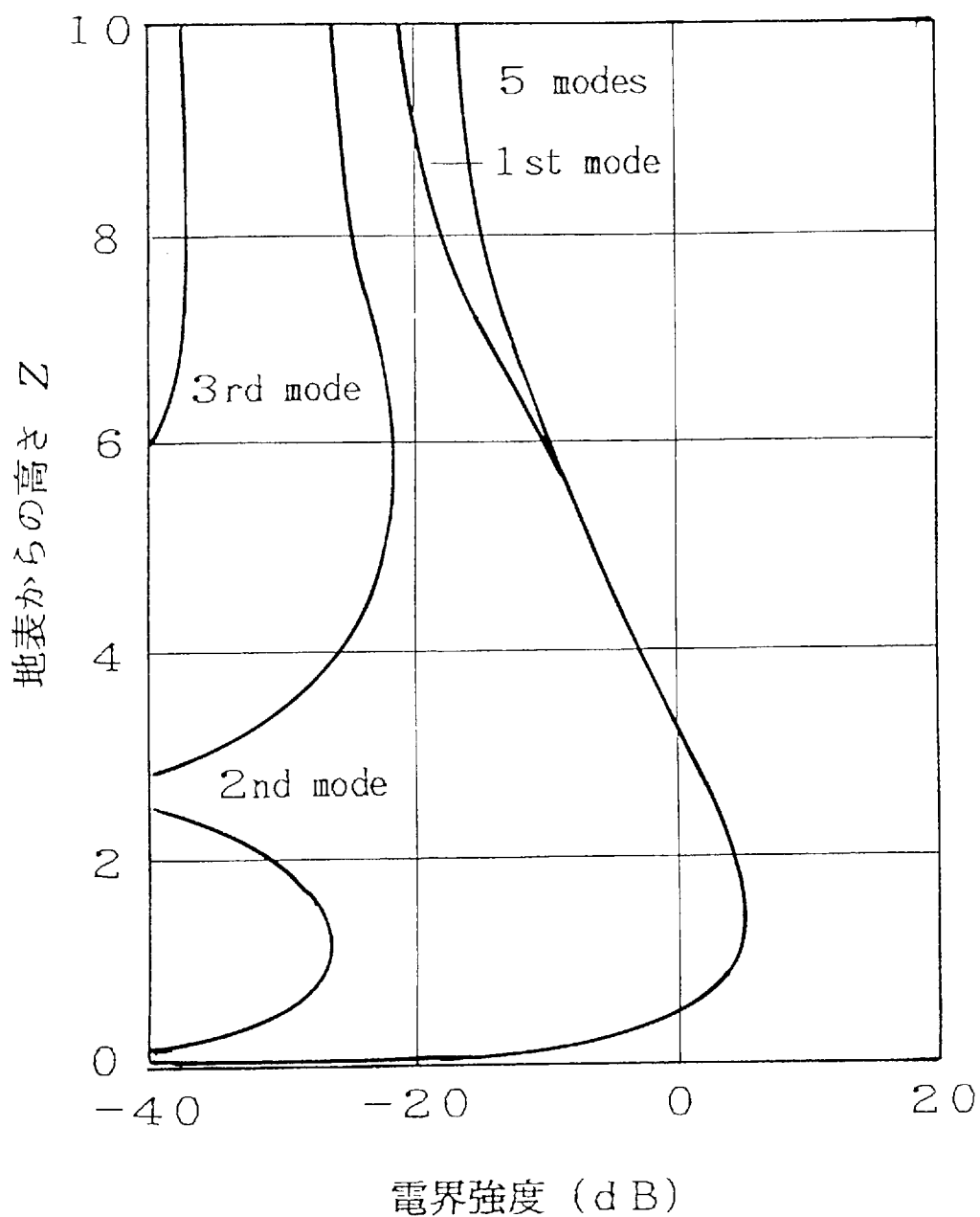


図2-33 相対受信電界強度の高度分布(8乗Nプロファイル)

ただし,  $n_s = n_d = 3$ ,  $l = 2$ , 送信高  $Z_t = 3$

受信距離  $R = 15$  (水平偏波)



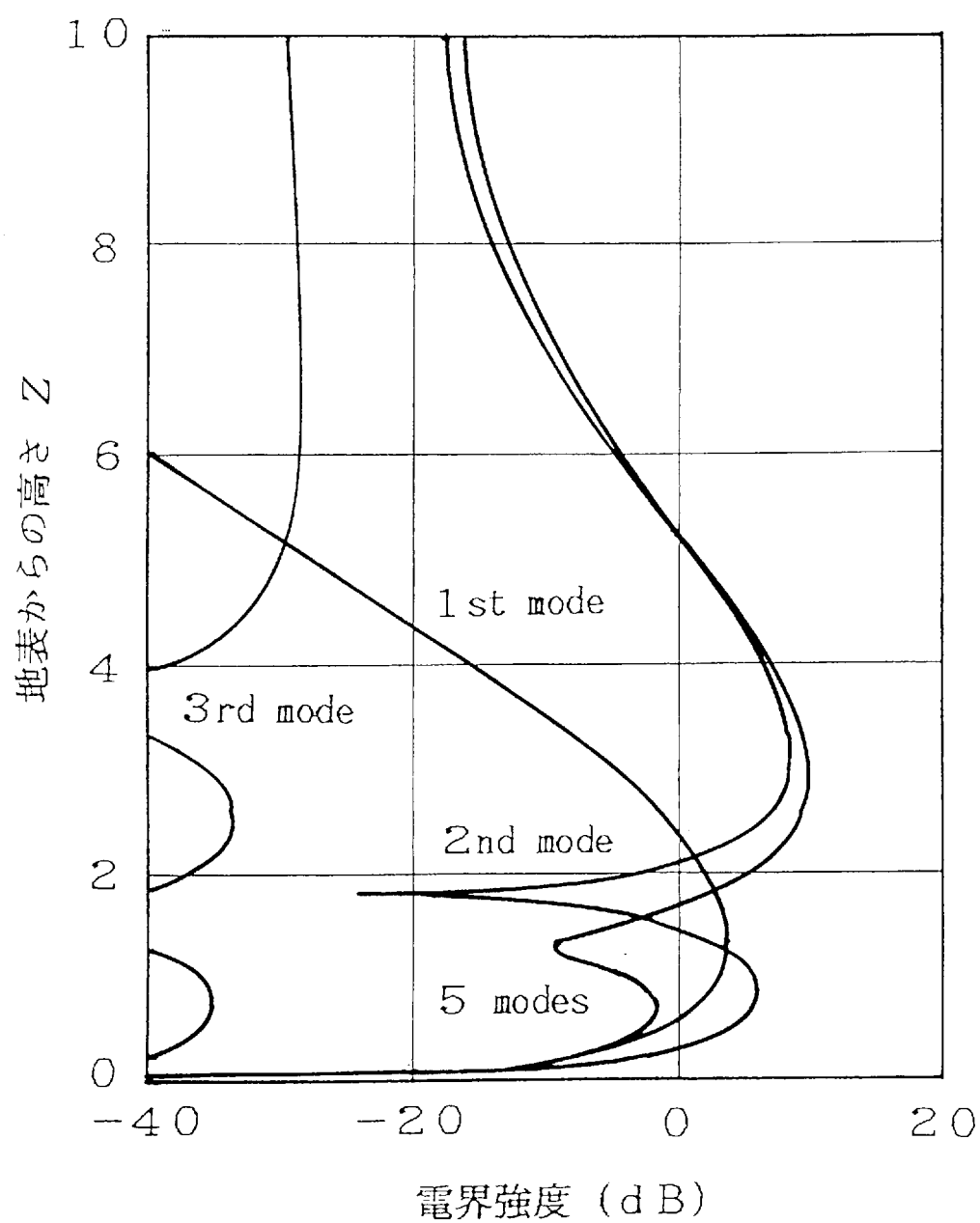


図2-34 相対受信電界強度の高度分布(2乗Nプロファイル)

ただし,  $n_s = n_d = l = 3$ , 送信高  $Z_t = 3$   
 受信距離  $R = 15$  (水平偏波)

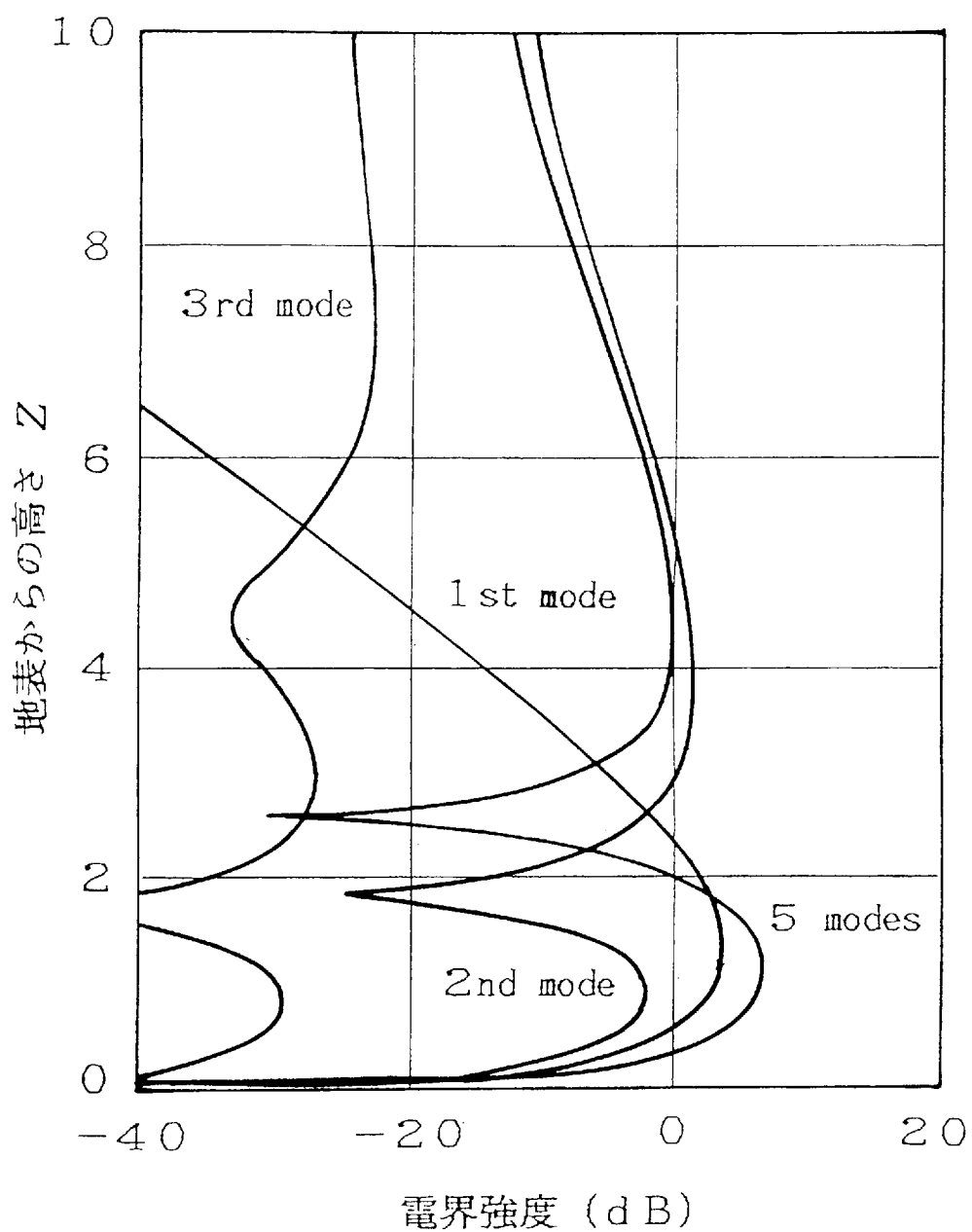


図2-35 相対受信電界強度の高度分布(4乗Nプロファイル)

ただし,  $n_s = n_d = l = 3$ , 送信高  $Z_t = 3$

受信距離  $R = 15$  (水平偏波)

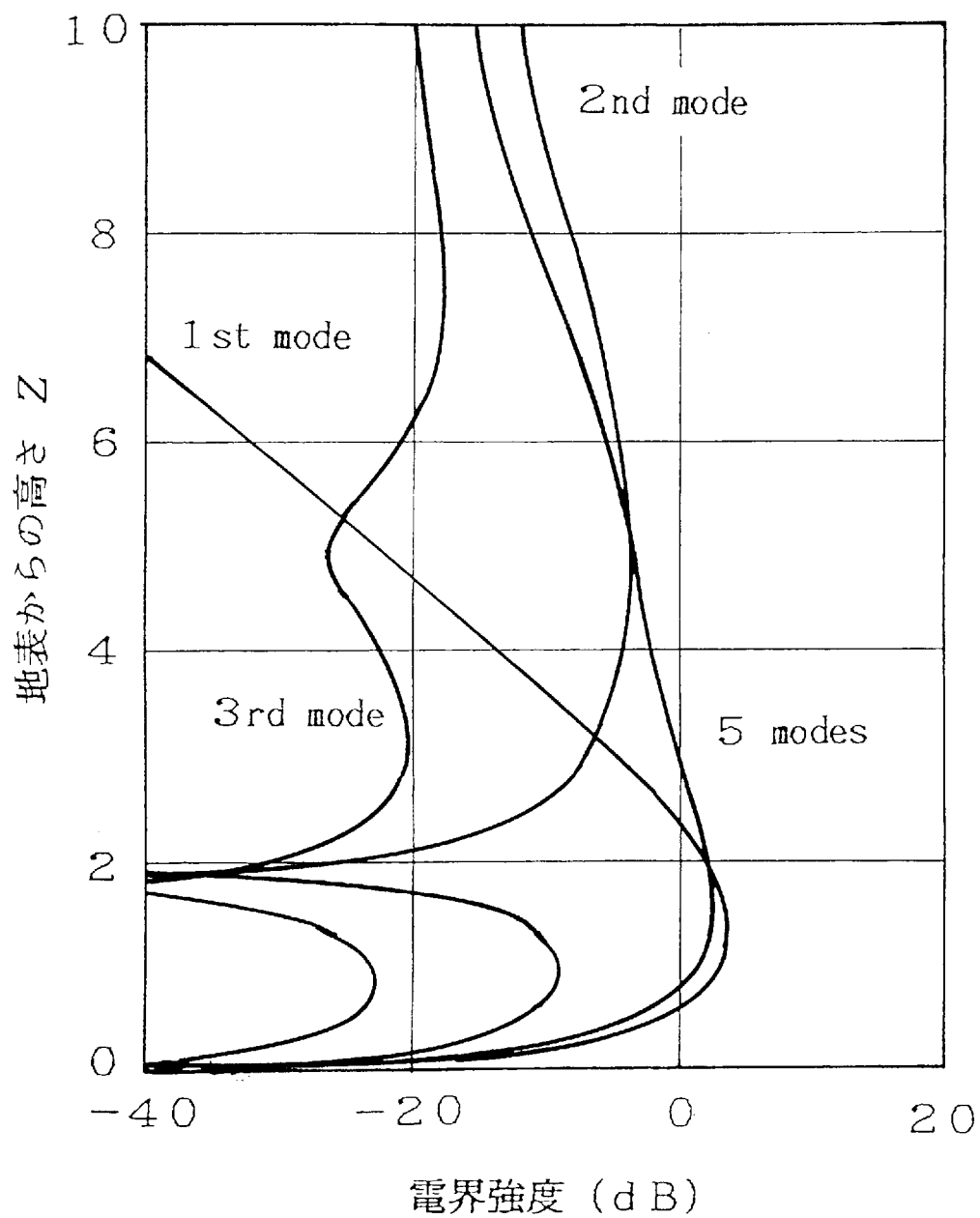


図2-36 相対受信電界強度の高度分布(6乗Nプロファイル)

ただし,  $n_s = n_d = l = 3$ , 送信高  $Z_t = 3$

受信距離  $R = 15$  (水平偏波)

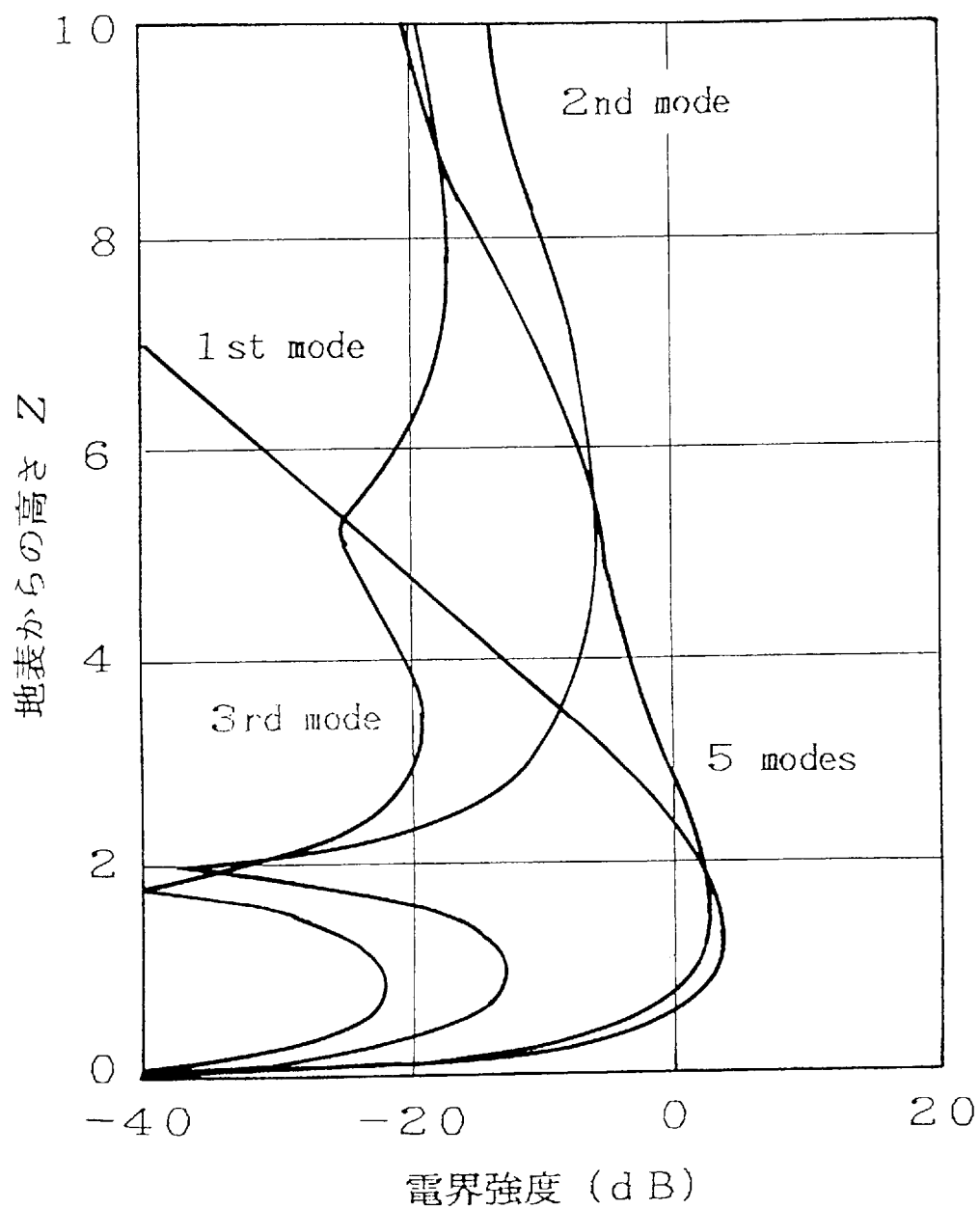


図2-37 相対受信電界強度の高度分布(8乗Nプロファイル)

ただし,  $n_s = n_d = l = 3$ , 送信高  $Z_t = 3$

受信距離  $R = 15$  (水平偏波)

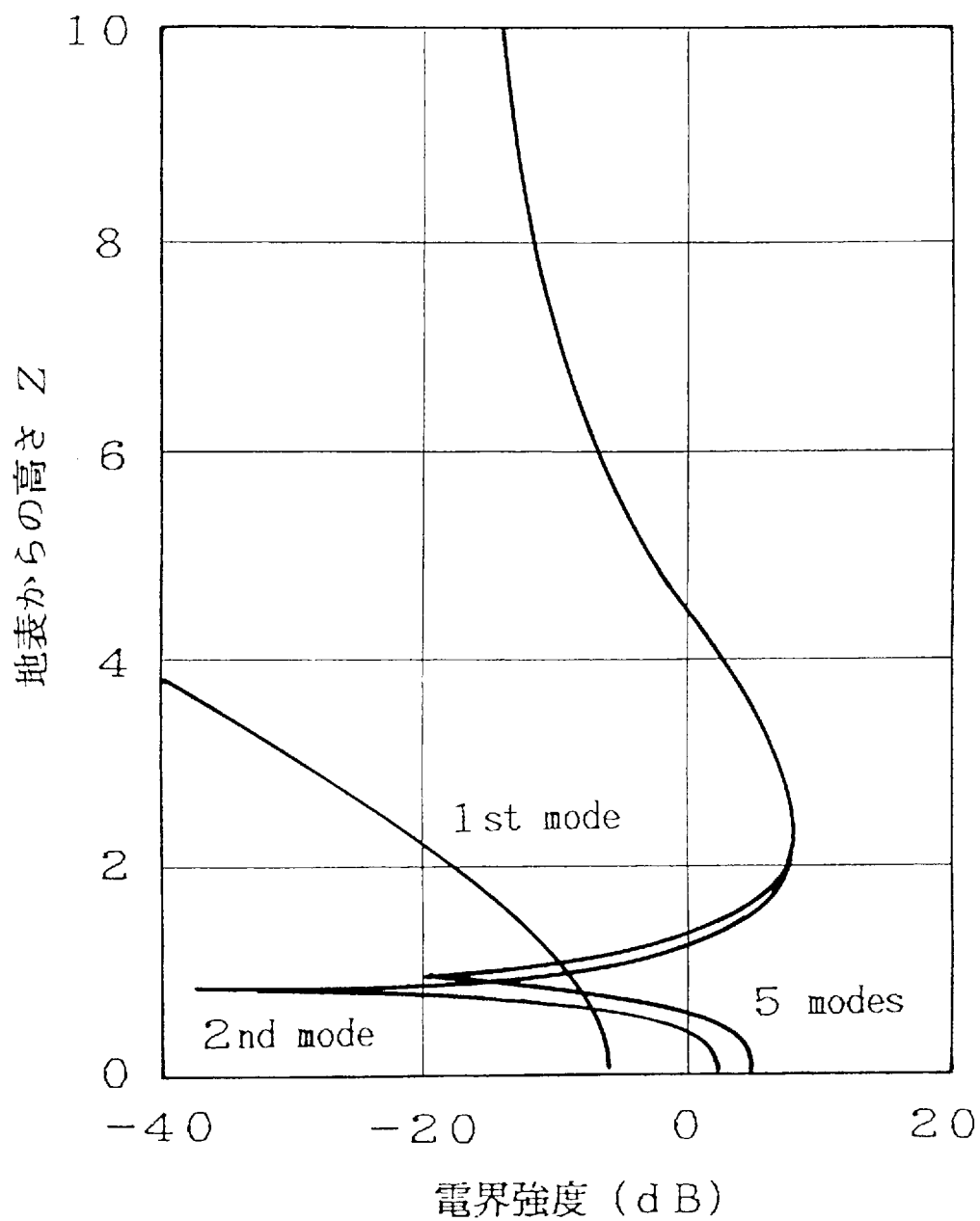


図2-38 相対受信電界強度の高度分布(2乗Nプロファイル)

ただし,  $n_s = n_d = 3$ ,  $l = 2$ , 送信高  $Z_t = 3$   
 受信距離  $R = 15$  (垂直偏波)

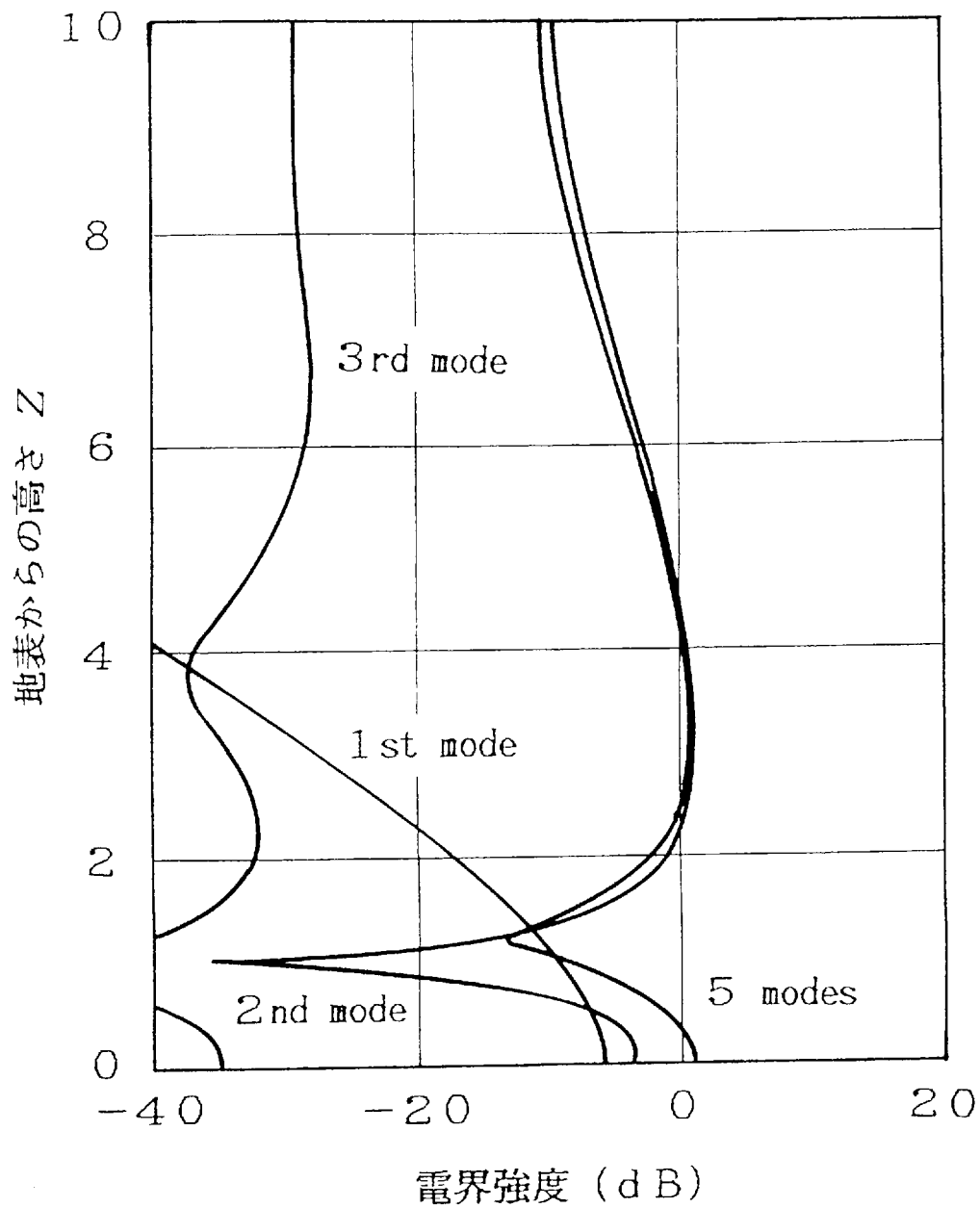


図2-39 相対受信電界強度の高度分布(4乗Nプロファイル)

ただし,  $n_s = n_d = 3$ ,  $l = 2$ , 送信高  $Z_t = 3$   
 受信距離  $R = 15$  (垂直偏波)

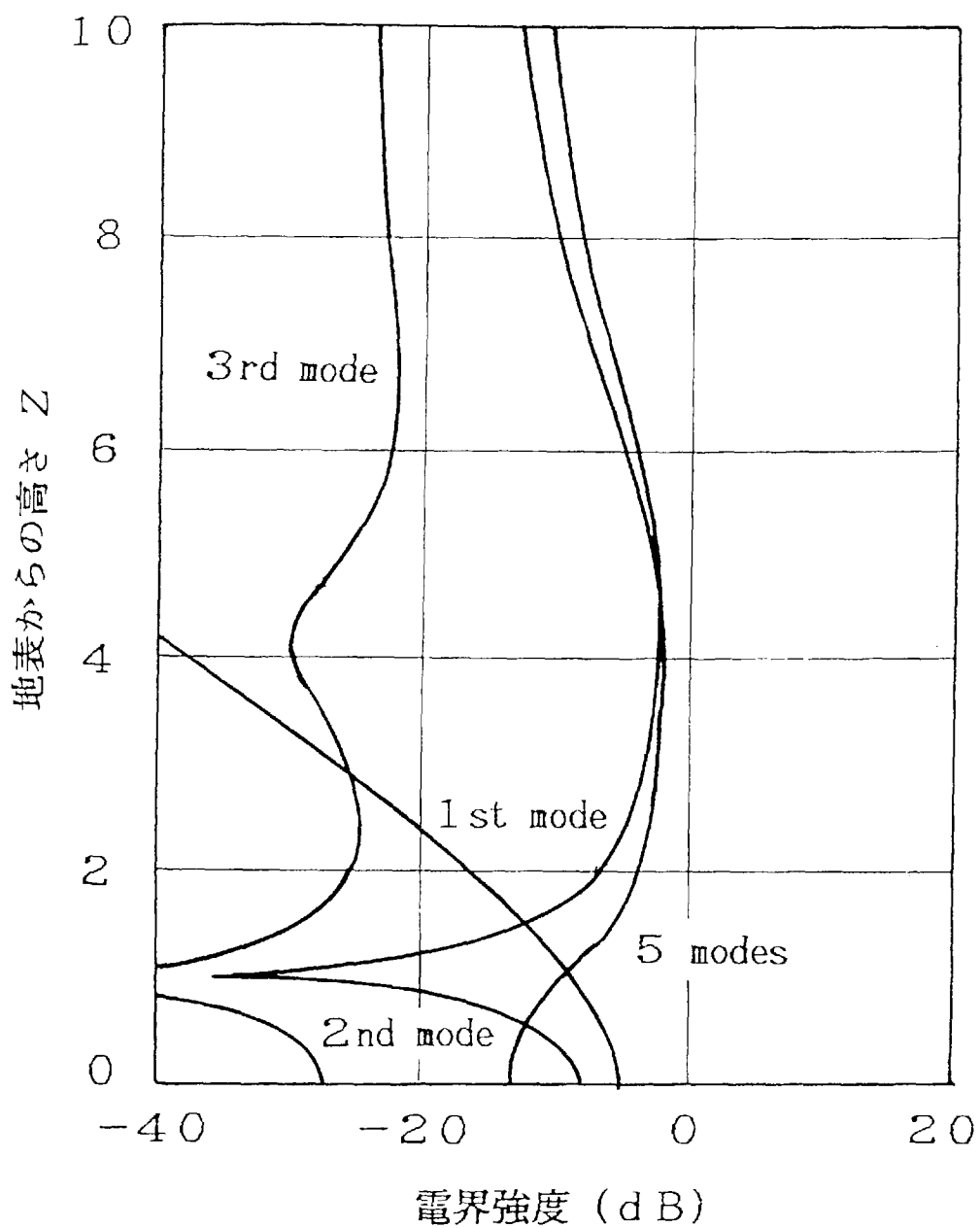


図2-40 相対受信電界強度の高度分布(6乗Nプロファイル)

ただし,  $n_s = n_d = 3$ ,  $l = 2$ , 送信高  $Z_t = 3$

受信距離  $R = 15$  (垂直偏波)

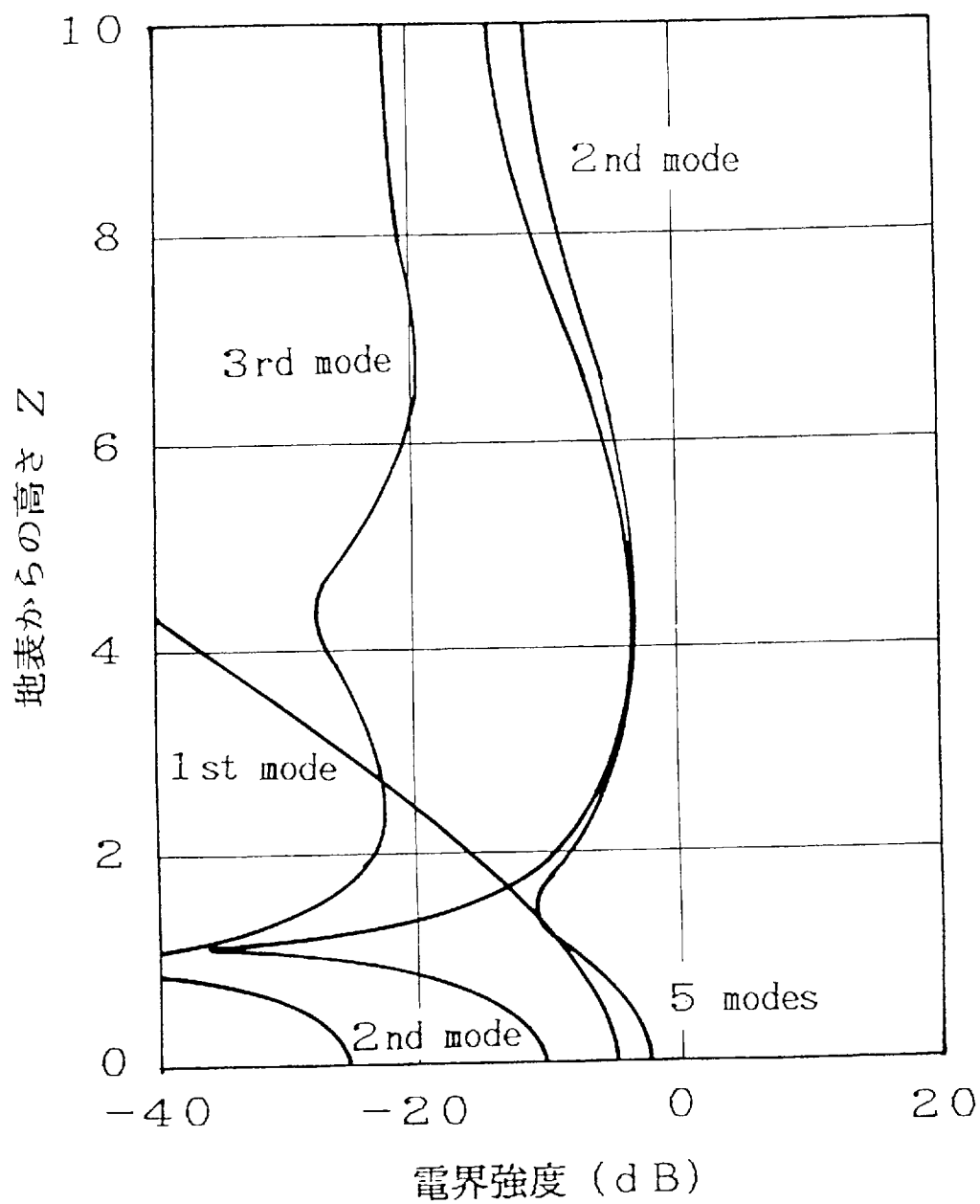


図2-4 1 相対受信電界強度の高度分布(8乗Nプロファイル)  
 ただし,  $n_s = n_d = 3$ ,  $l = 2$ , 送信高  $Z_t = 3$   
 受信距離  $R = 15$  (垂直偏波)



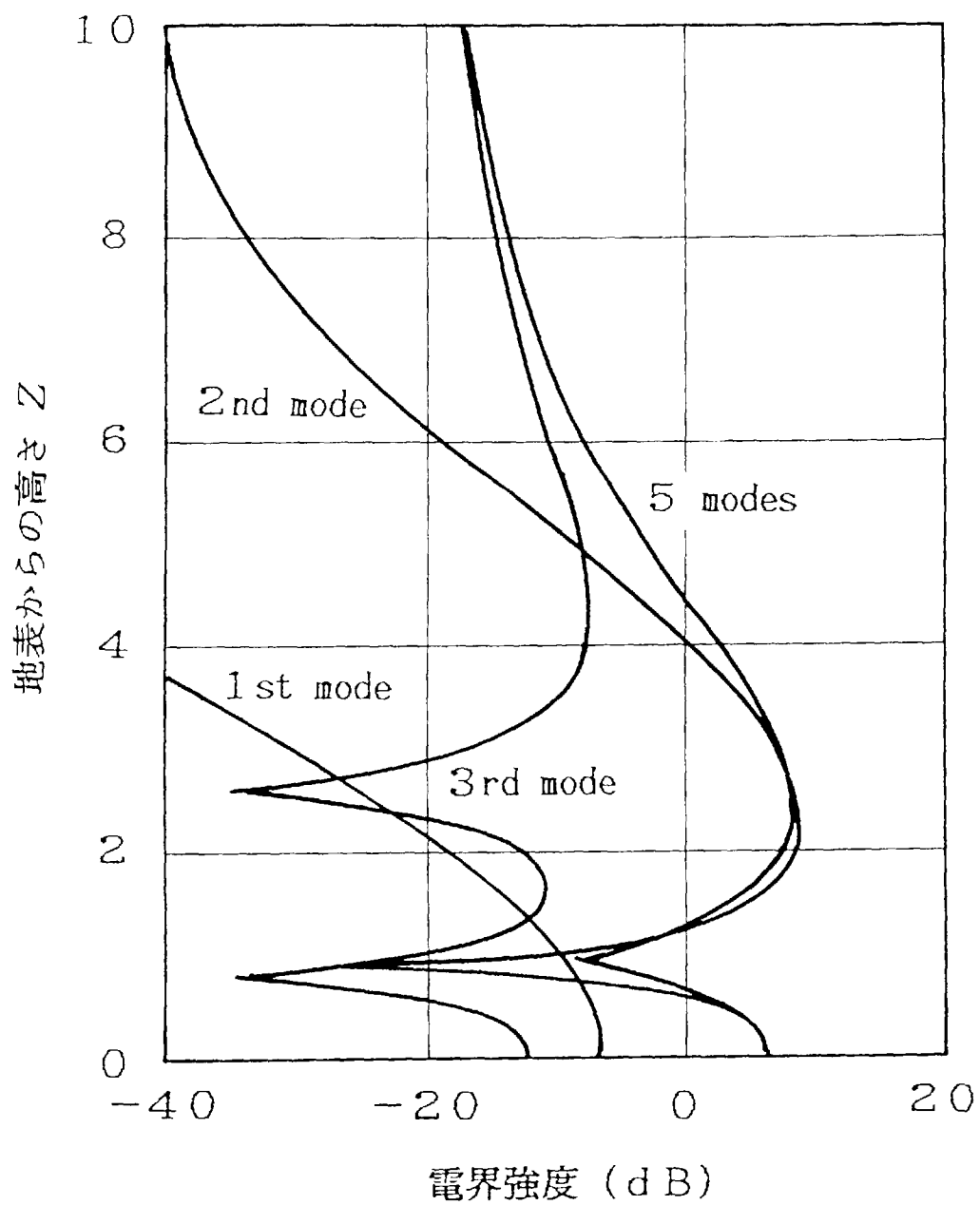


図2-42 相対受信電界強度の高度分布(2乗Nプロファイル)

ただし,  $n_s = n_d = l = 3$ , 送信高  $Z_t = 3$

受信距離  $R = 15$  (垂直偏波)

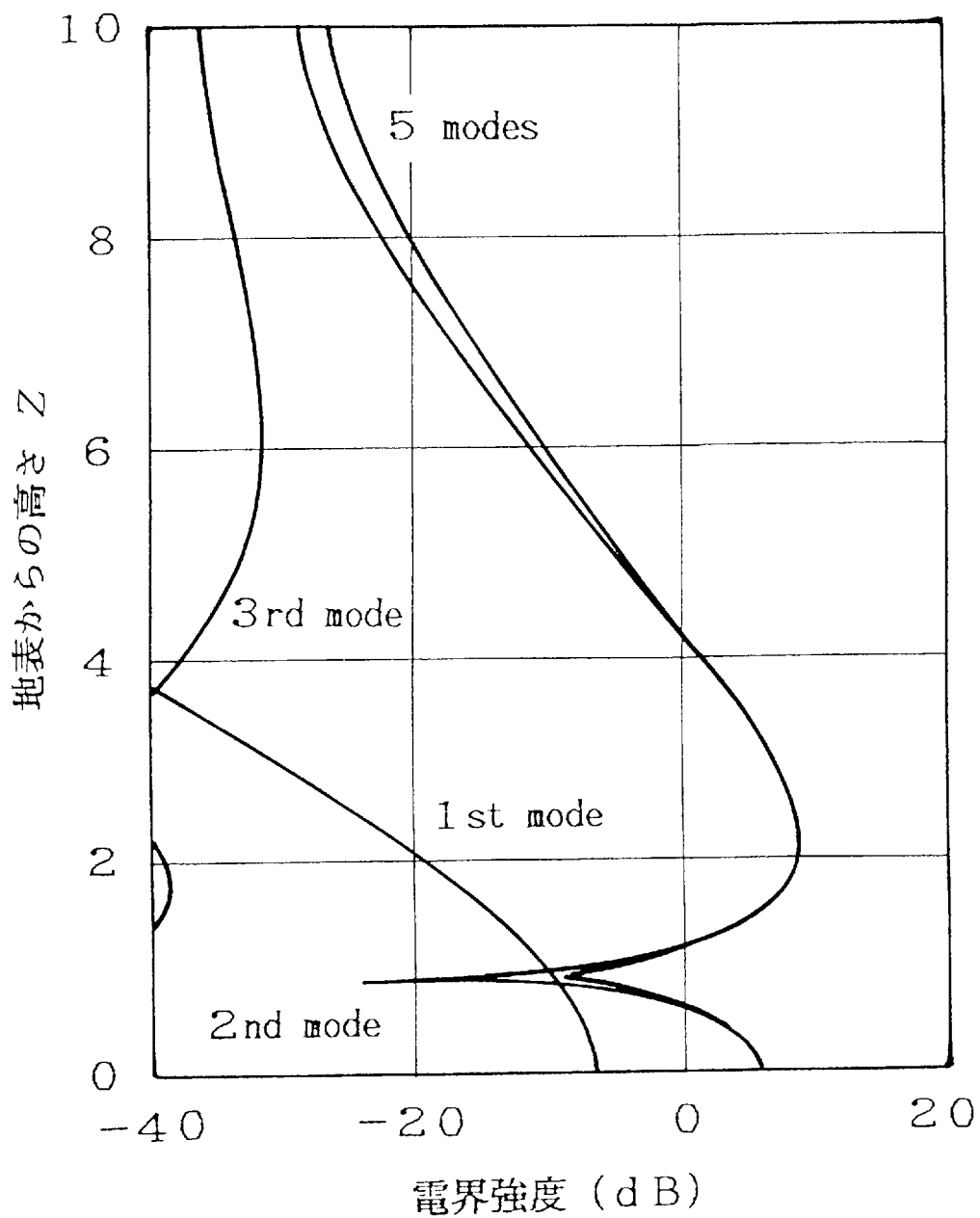


図2-43 相対受信電界強度の高度分布(4乗Nプロファイル)

ただし,  $n_s = n_d = l = 3$ , 送信高  $Z_t = 3$

受信距離  $R = 15$  (垂直偏波)

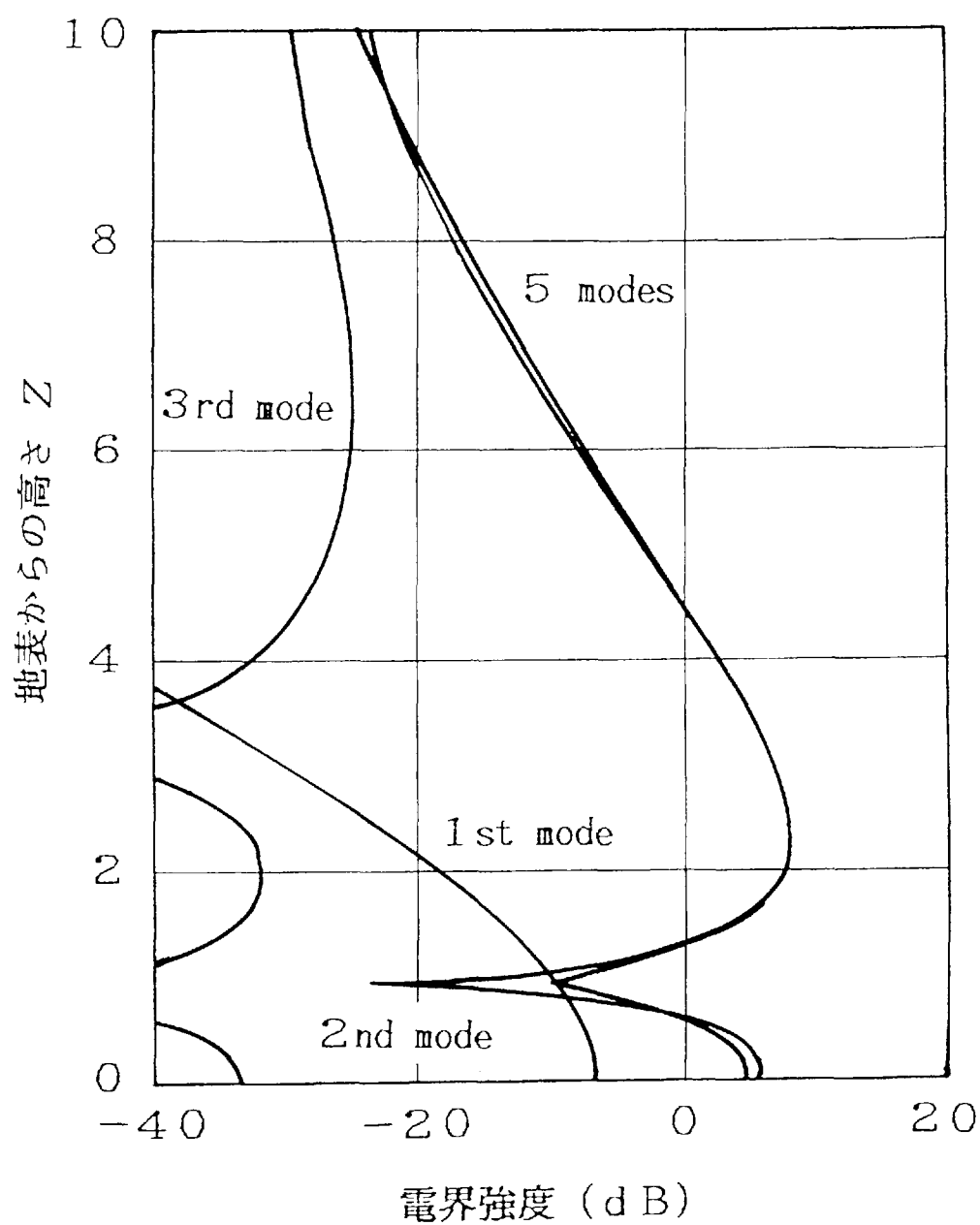


図2-44 相対受信電界強度の高度分布(6乗Nプロファイル)

ただし,  $n_s = n_d = l = 3$ , 送信高  $Z_t = 3$

受信距離  $R = 15$  (垂直偏波)

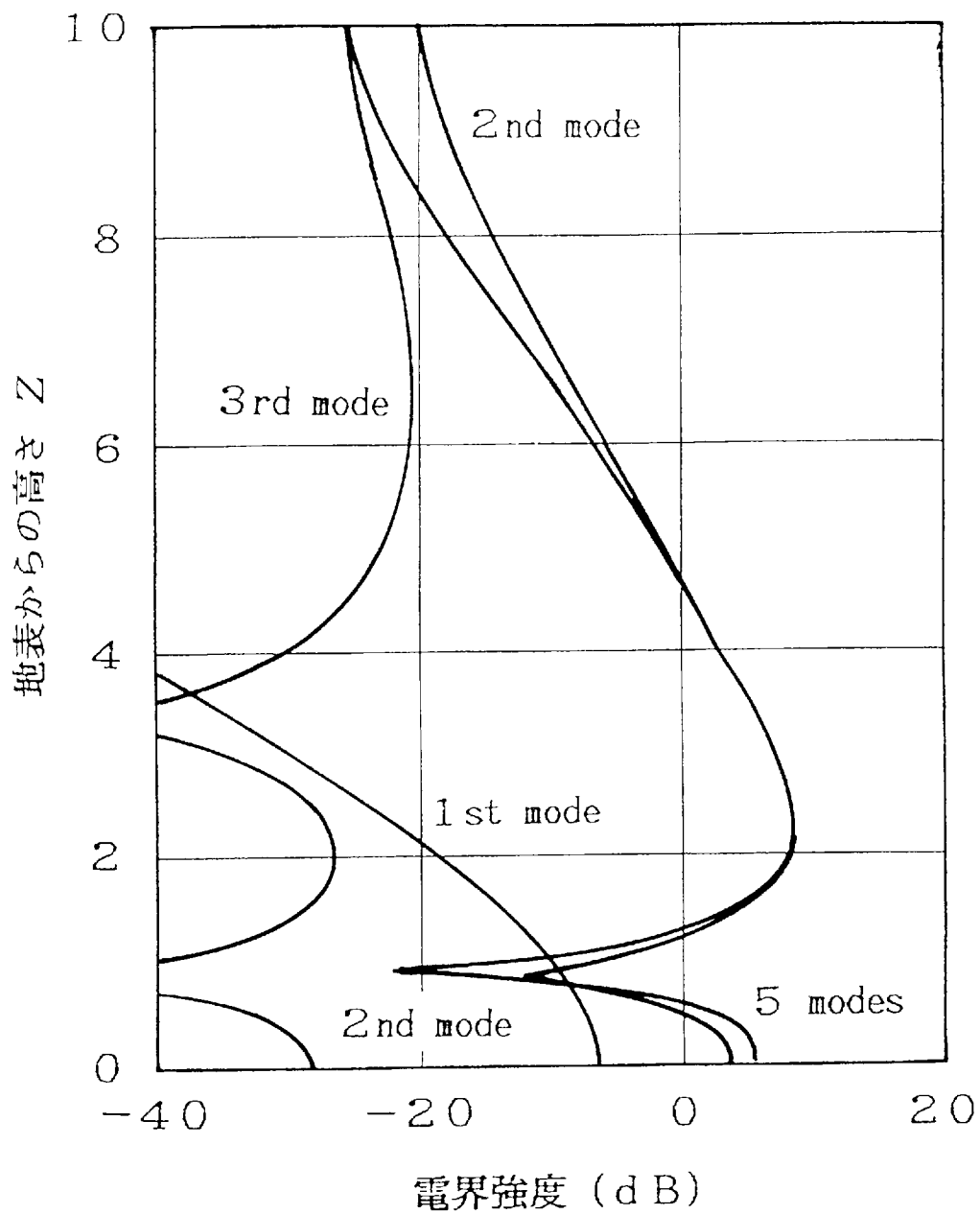


図2-45 相対受信電界強度の高度分布(8乗Nプロファイル)

ただし,  $\eta_s = \eta_d = l = 3$ , 送信高  $Z_t = 3$

受信距離  $R = 15$  (垂直偏波)

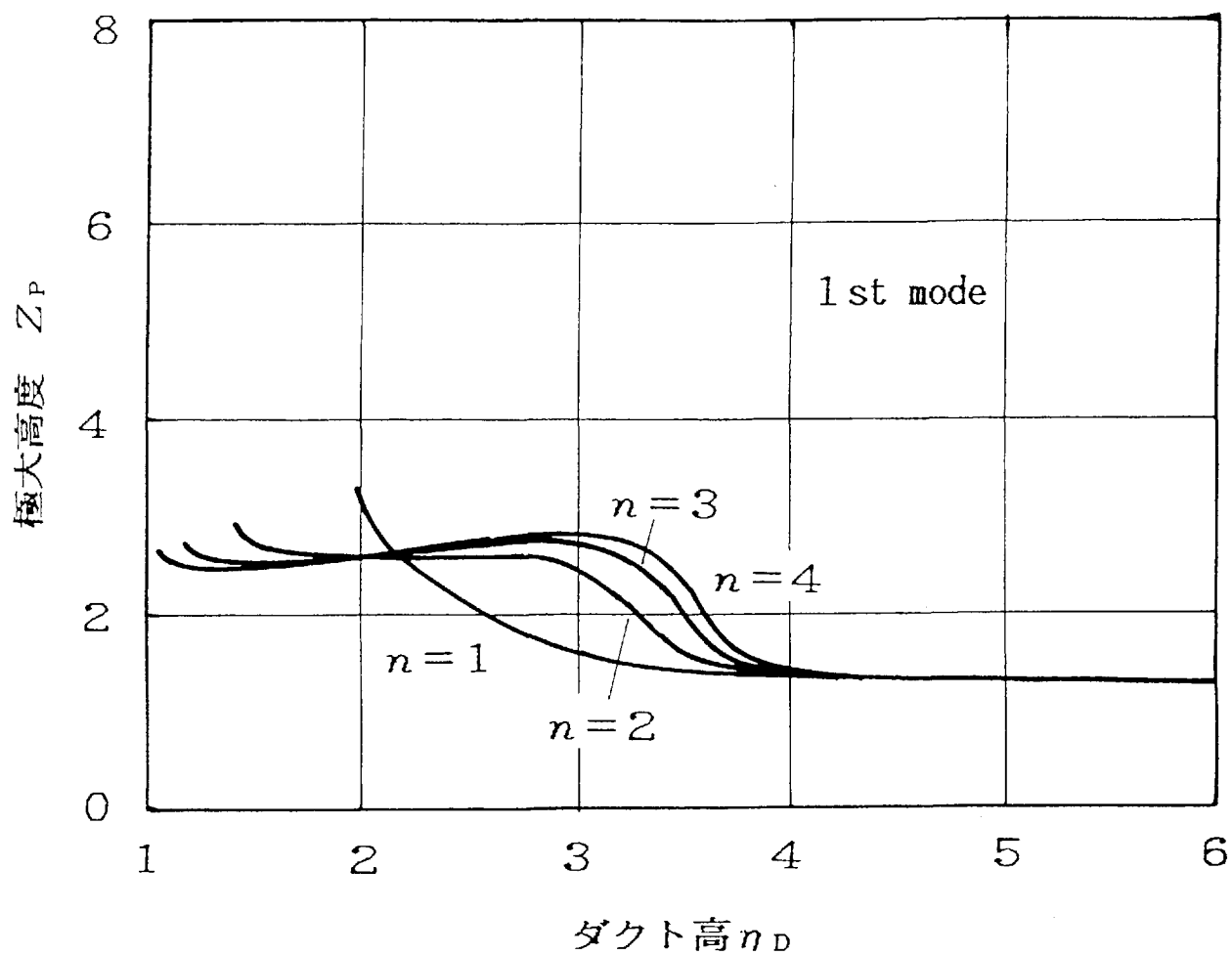


図2-46 第1モードのダクト高と極大電界高度との関係  
 ただし,  $n_s=2$ , 送信高 $Z_t=1$ , 受信距離 $R=15$   
 (水平偏波)

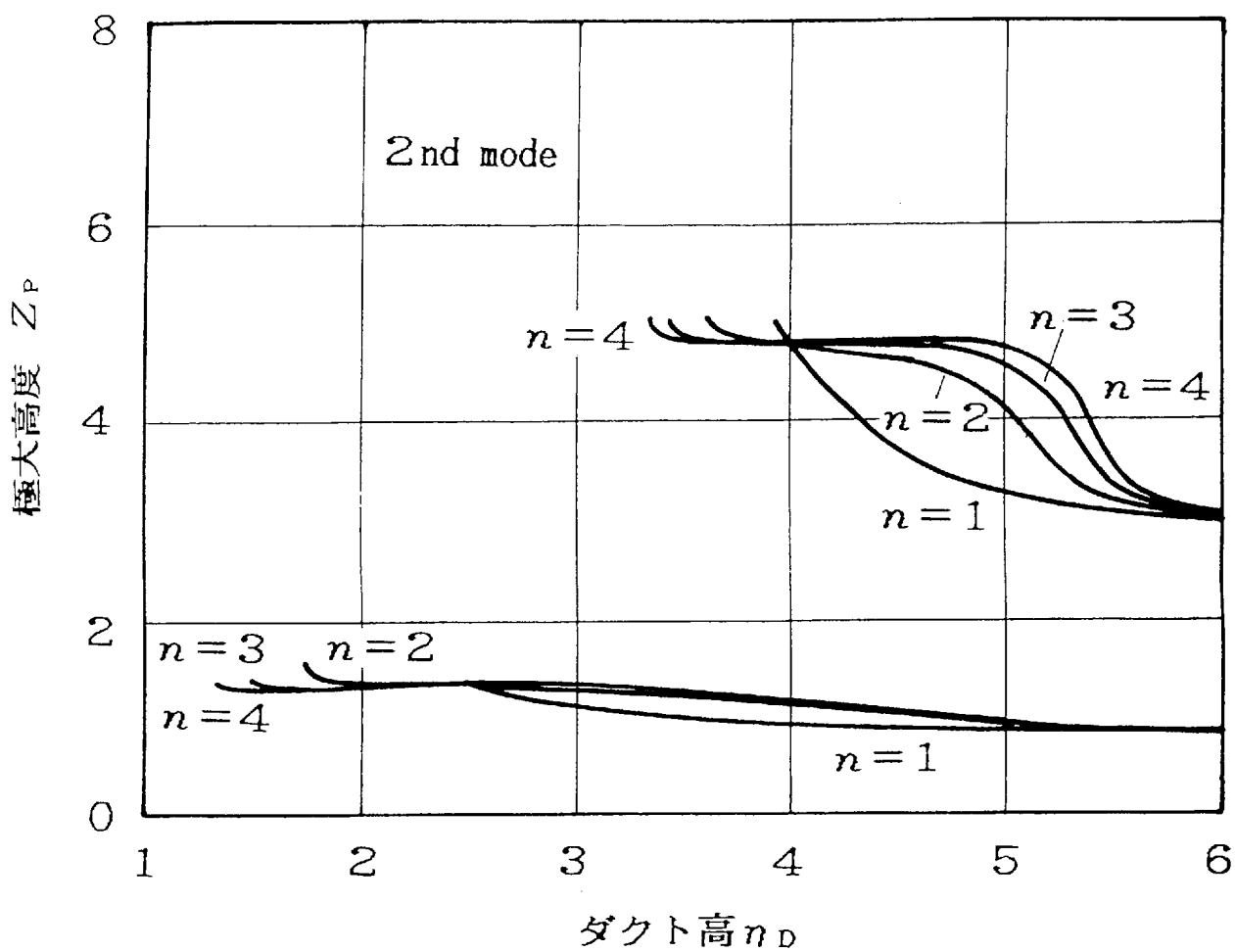


図2-47 第2モードのダクト高と極大電界高度との関係  
 ただし,  $n_s=2$ , 送信高  $Z_t=1$ , 受信距離  $R=15$   
 (水平偏波)

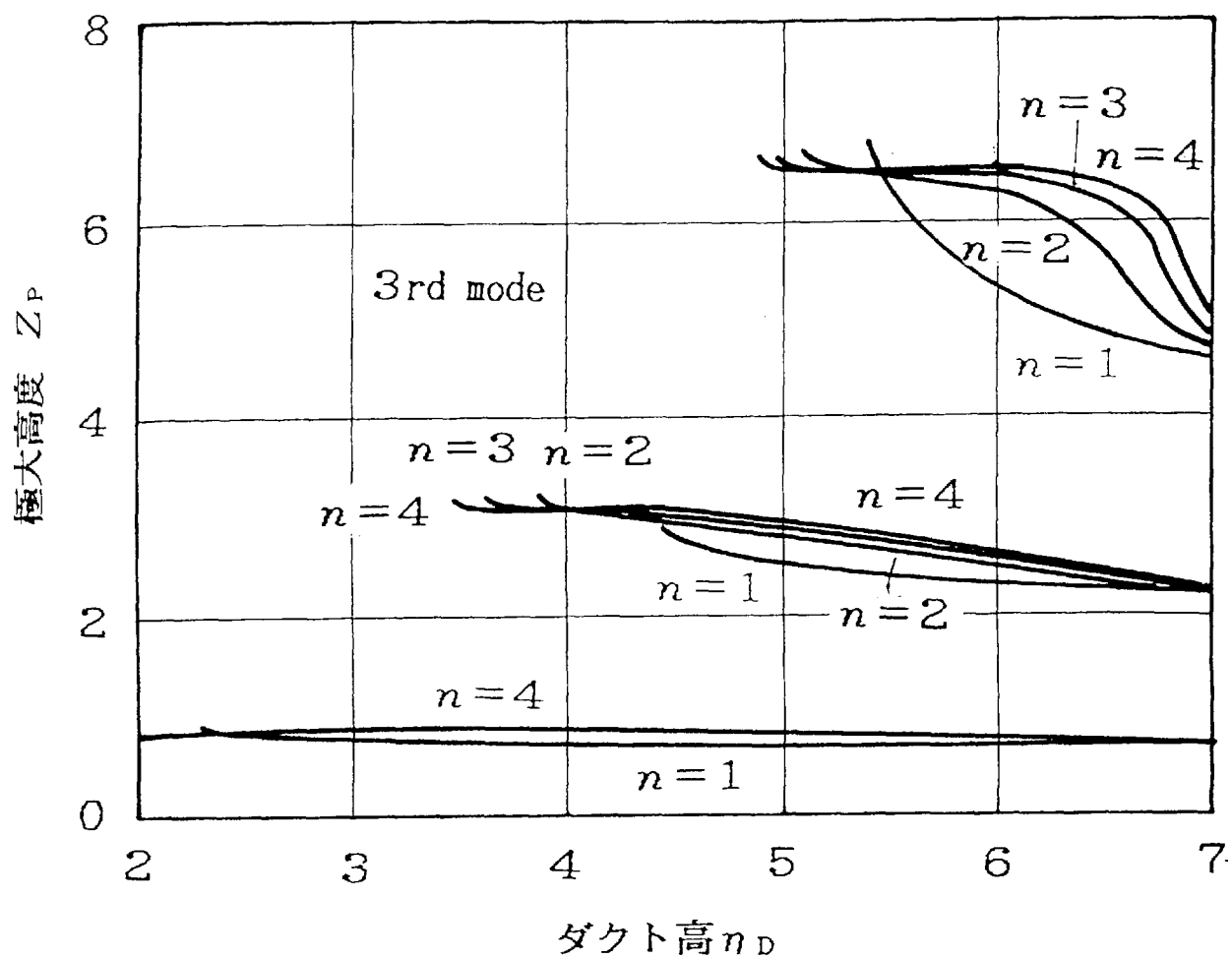


図2-48 第3モードのダクト高と極大電界高度との関係  
 ただし,  $n_s = 2$ , 送信高  $Z_t = 1$ , 受信距離  $R = 15$   
 (水平偏波)

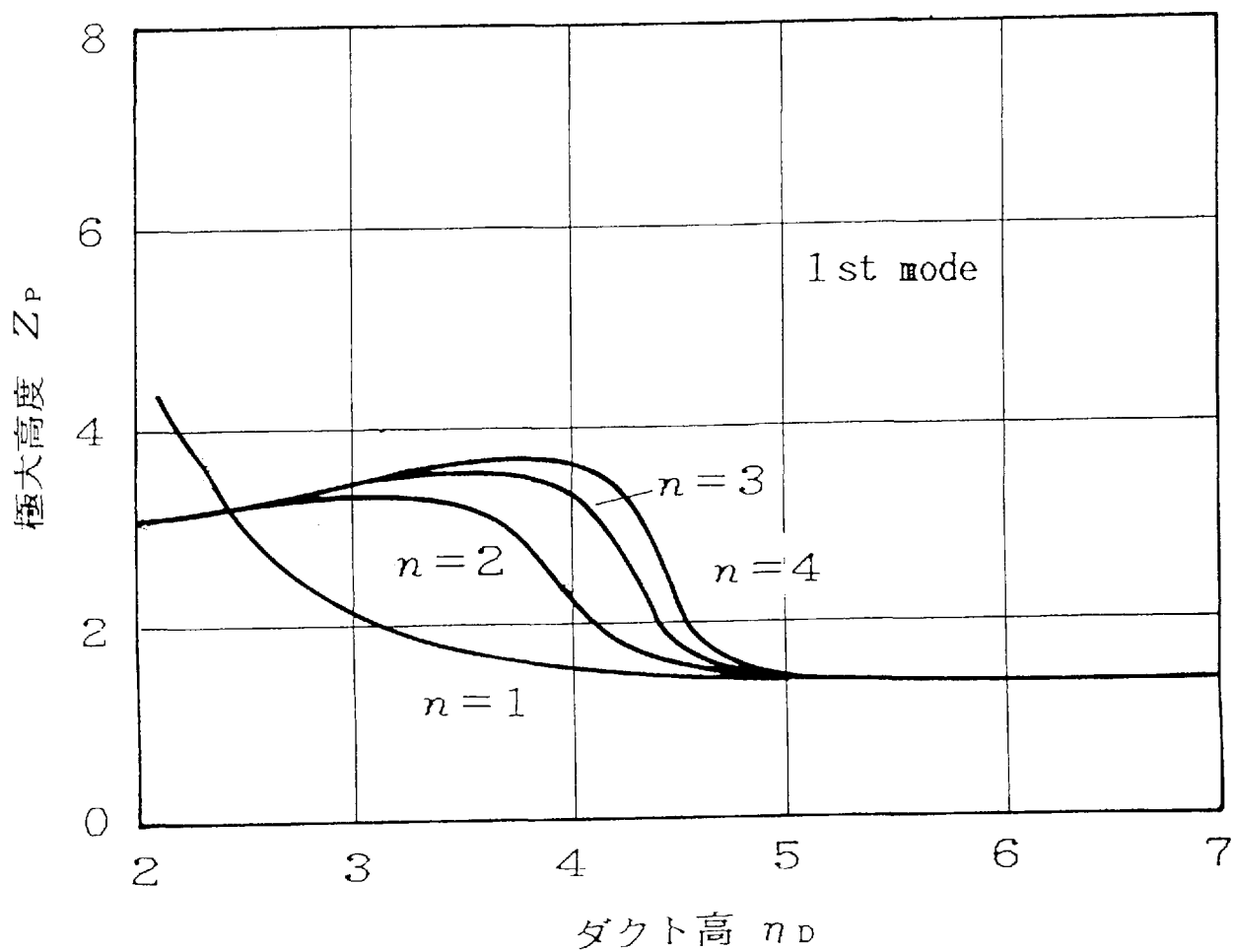


図2-49 第1モードのダクト高と極大電界高度との関係  
 ただし,  $n_s=3$ , 送信高 $Z_t=3$ , 受信距離 $R=15$   
 (水平偏波)



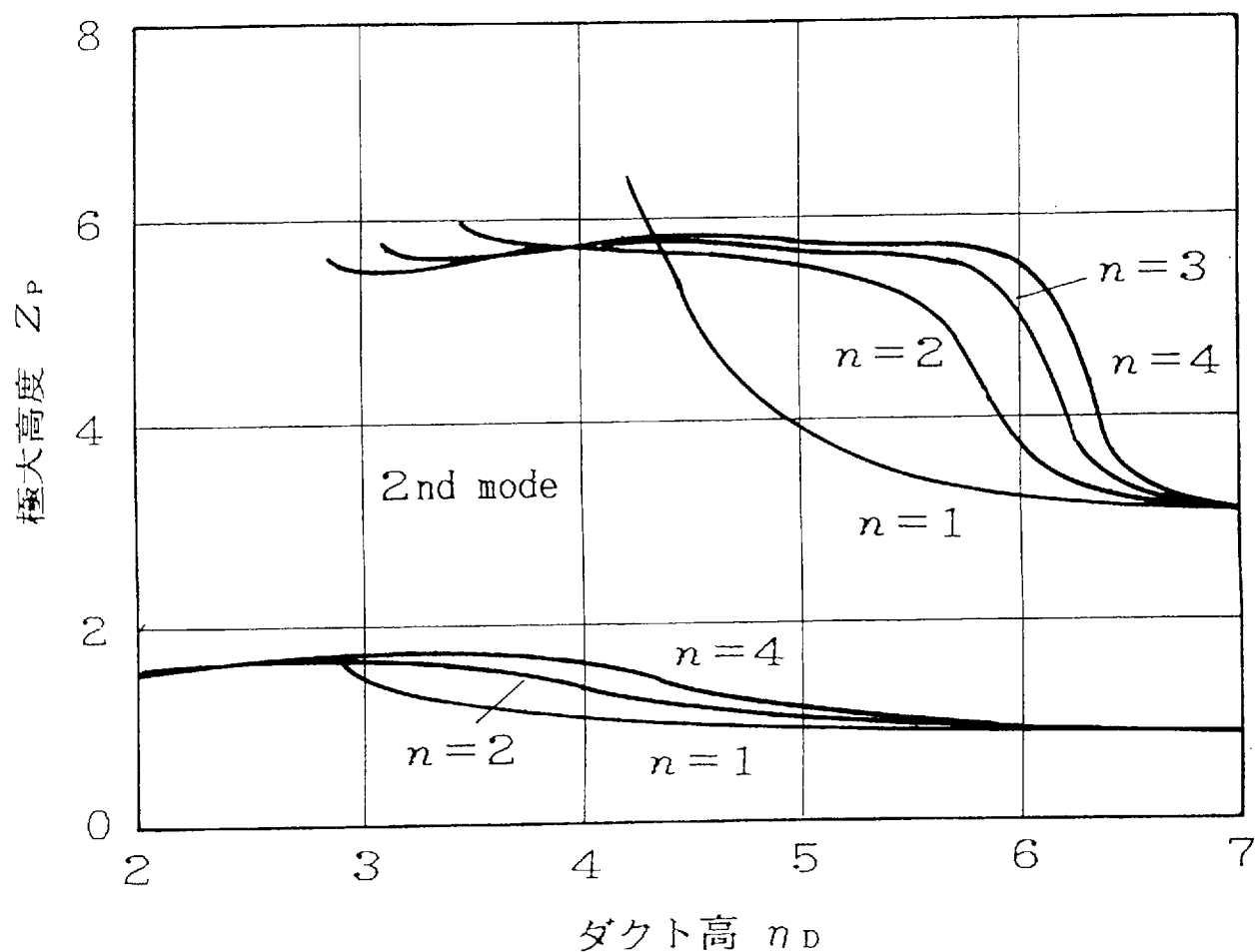


図2-50 第2モードのダクト高と極大電界高度との関係  
 ただし,  $n_s = 3$ , 送信高  $Z_t = 3$ , 受信距離  $R = 15$   
 (水平偏波)

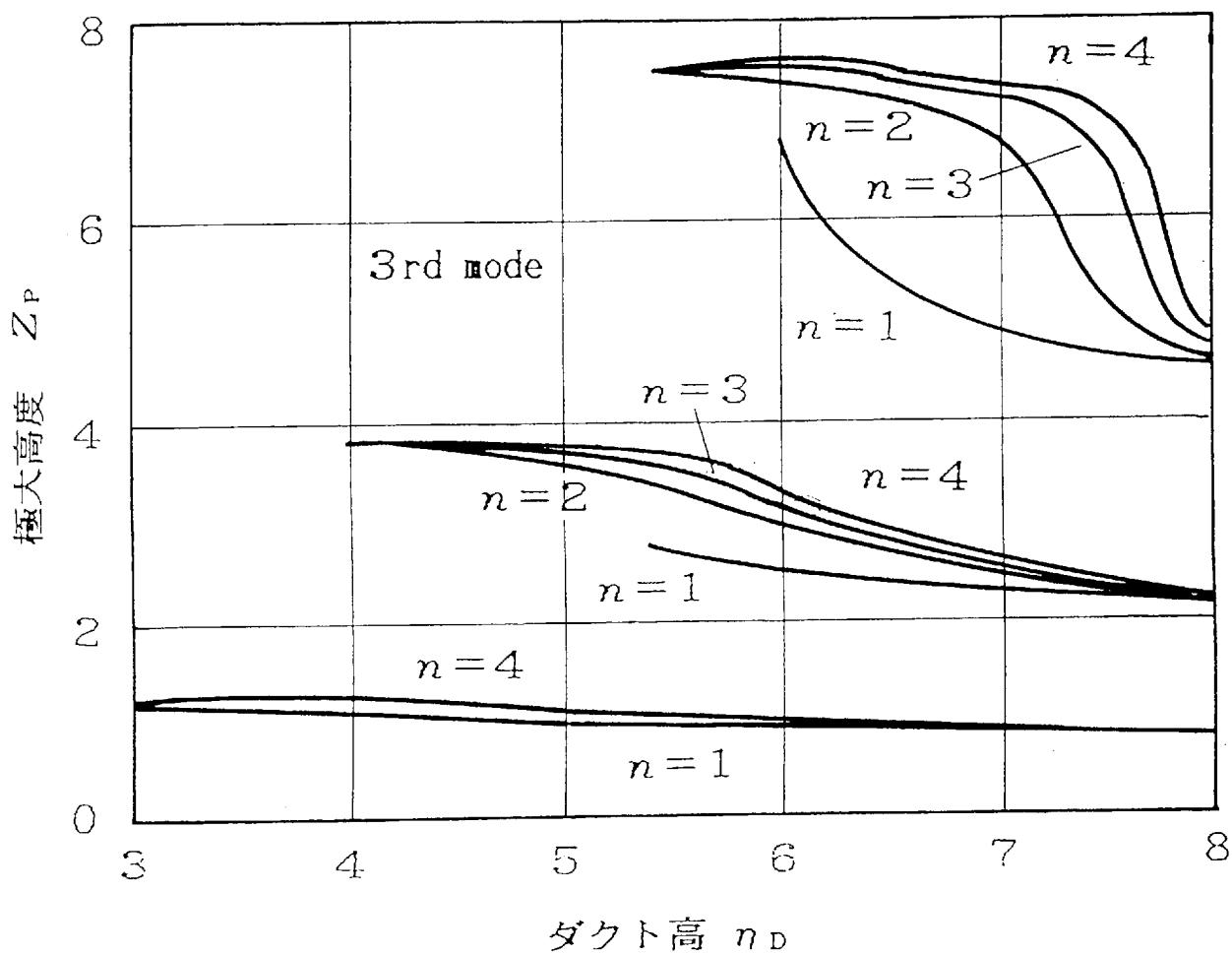


図2-51 第3モードのダクト高と極大電界高度との関係  
 ただし、 $n_s = 3$ ，送信高 $Z_t = 3$ ，受信距離 $R = 15$   
 (水平偏波)

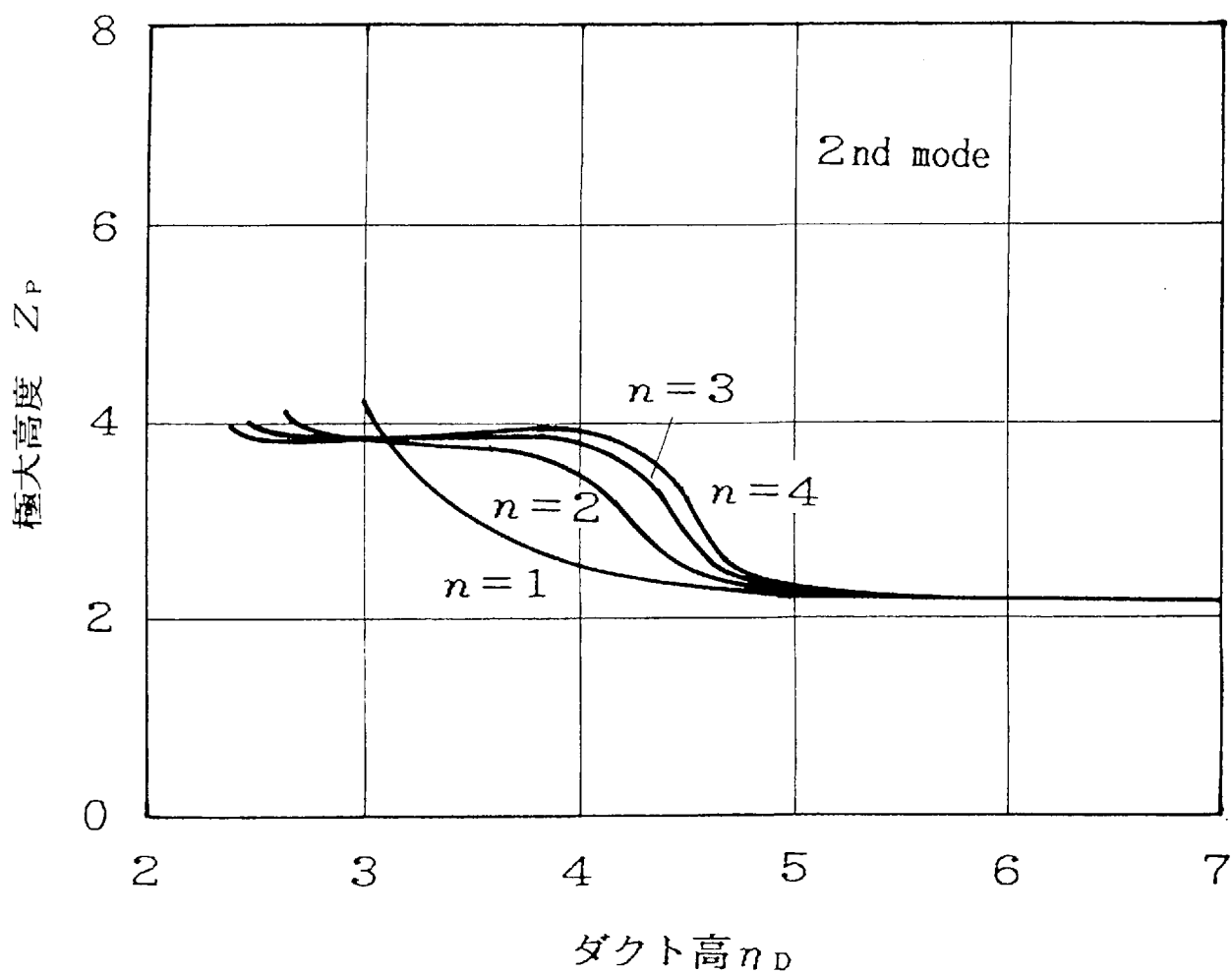


図2-52 第2モードのダクト高と極大電界高度との関係  
 ただし， $\eta_s = 2$ ，送信高 $Z_t = 2$ ，受信距離 $R = 1.5$   
 (垂直偏波)

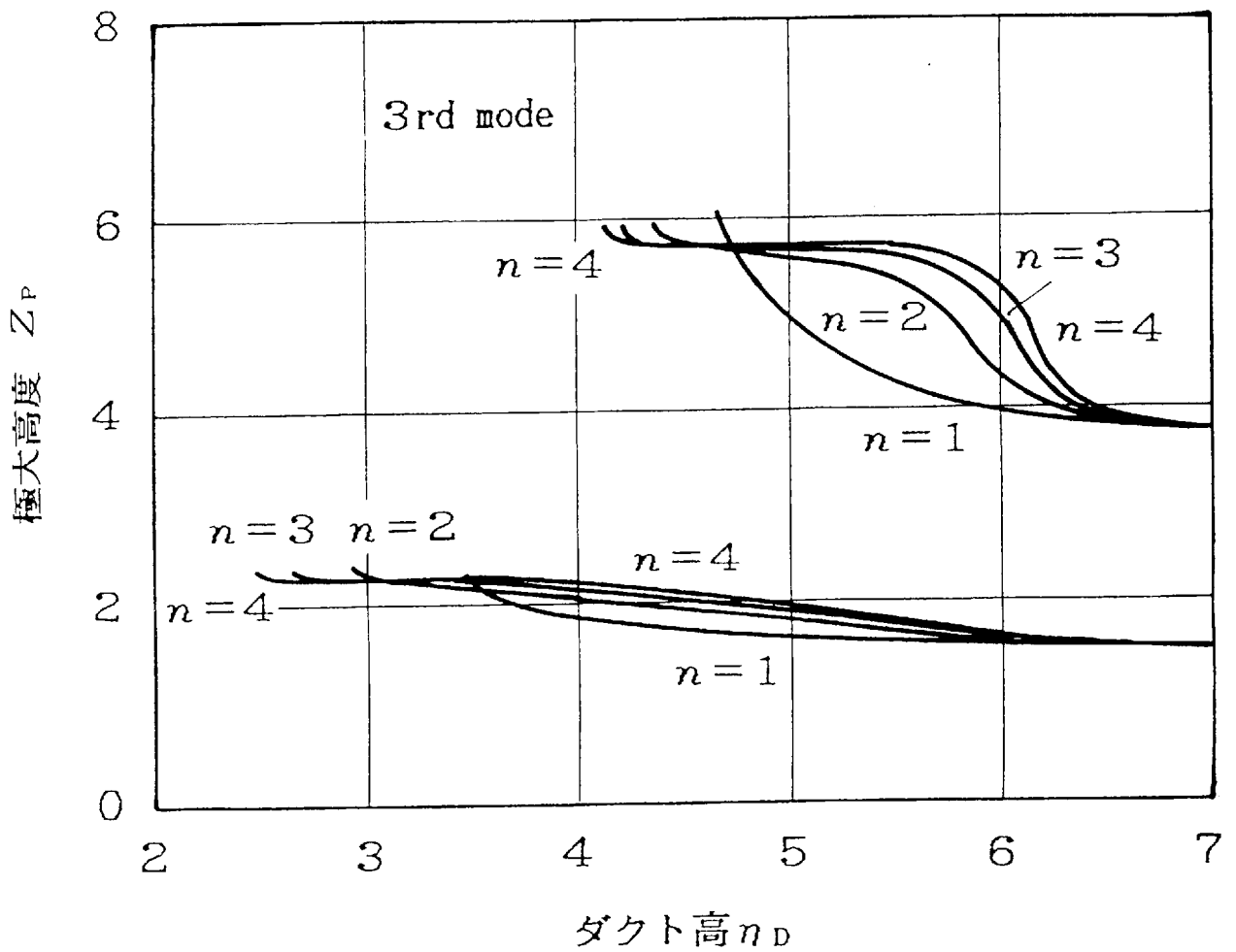


図2-53 第3モードのダクト高と極大電界高度との関係  
 ただし、 $n_s=2$ ，送信高 $Z_t=2$ ，受信距離 $R=15$   
 (垂直偏波)

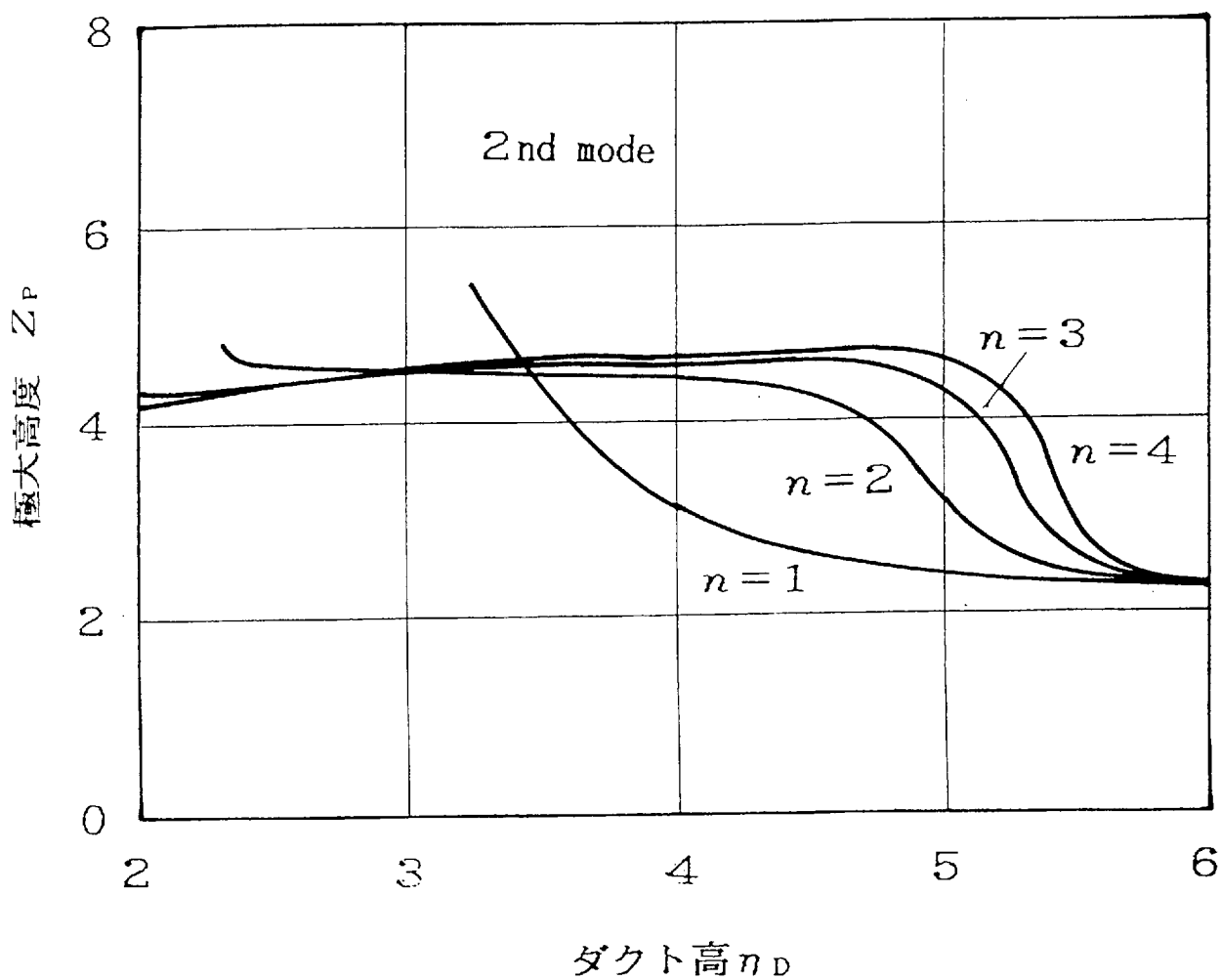


図2-54 第2モードのダクト高と極大電界高度との関係  
 ただし、 $n_s=3$ ，送信高 $Z_t=3$ ，受信距離 $R=15$   
 (垂直偏波)

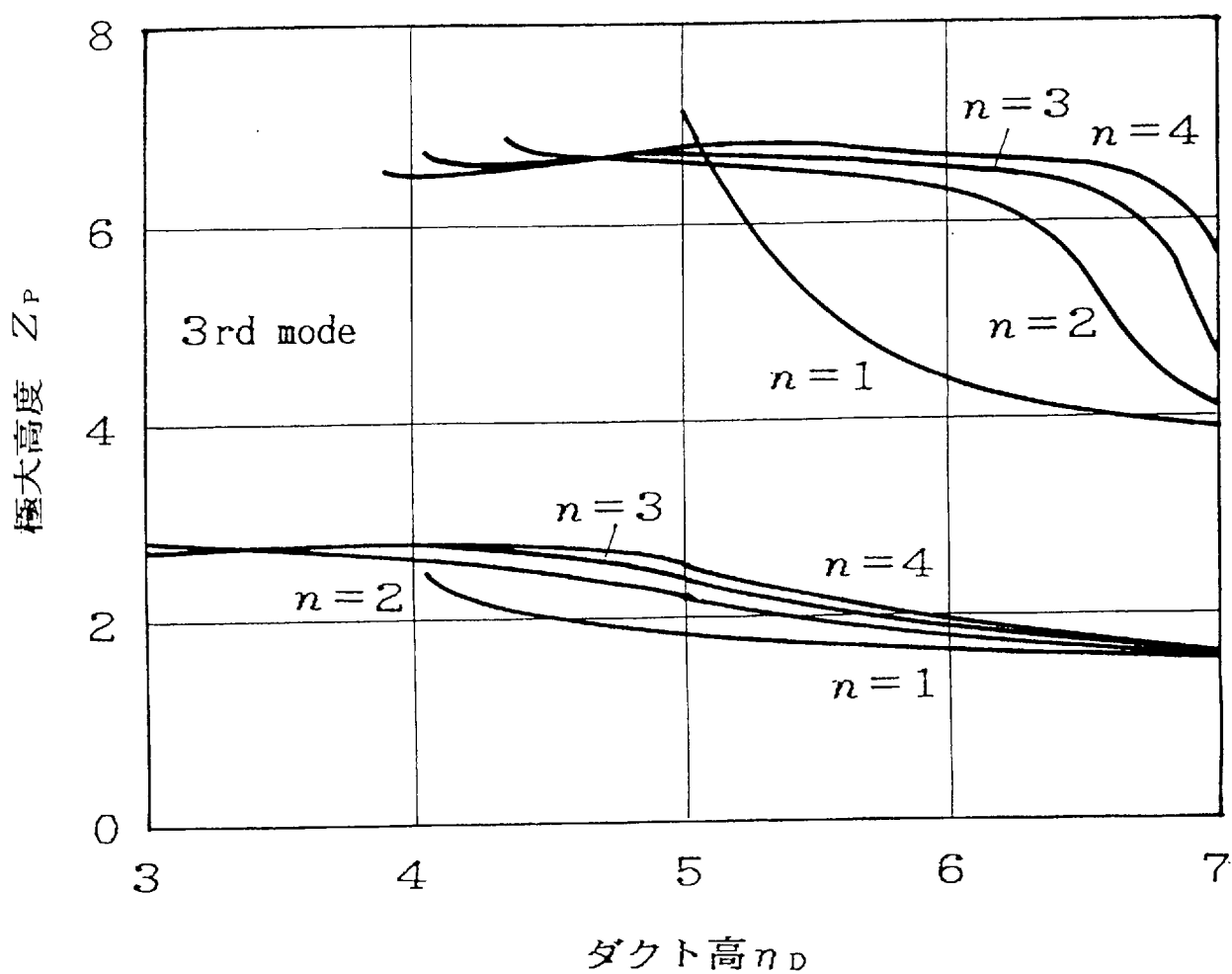


図2-55 第2モードのダクト高と極大電界高度との関係  
 ただし,  $n_s=3$ , 送信高  $Z_t=3$ , 受信距離  $R=15$   
 (垂直偏波)

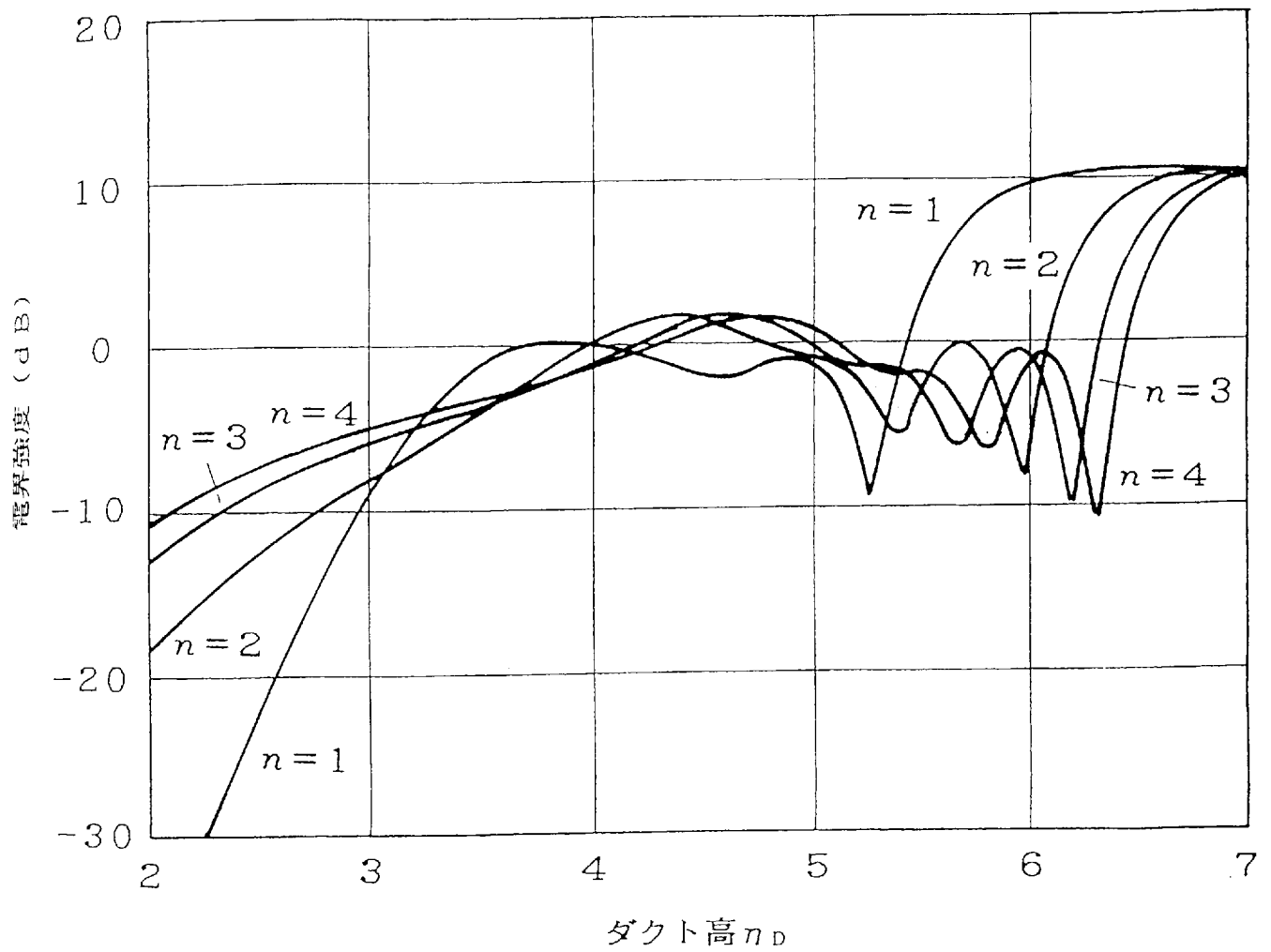


図2-56 ダクト高に対する相対受信電界強度の変動特性

ただし,  $n_s = 3$ , 受信距離  $R = 15$  (水平偏波)  
 地表面からの送受信高  $Z_t = Z_r = 3$

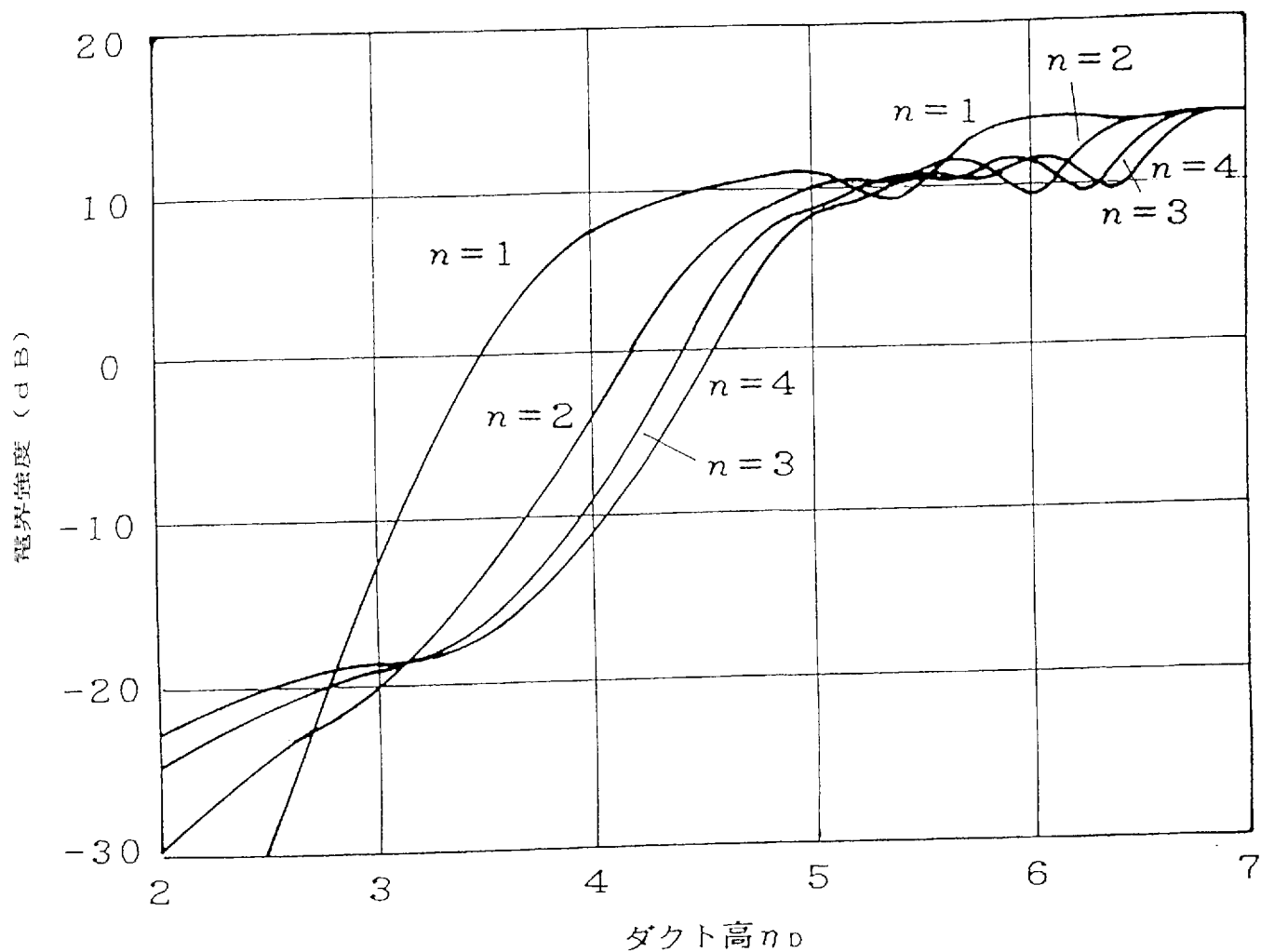


図2-57 ダクト高に対する相対受信電界強度の変動特性

ただし,  $n_s=3$ , 受信距離  $R=15$  (水平偏波)  
 地表面からの送受信高  $Z_t=Z_r=1$



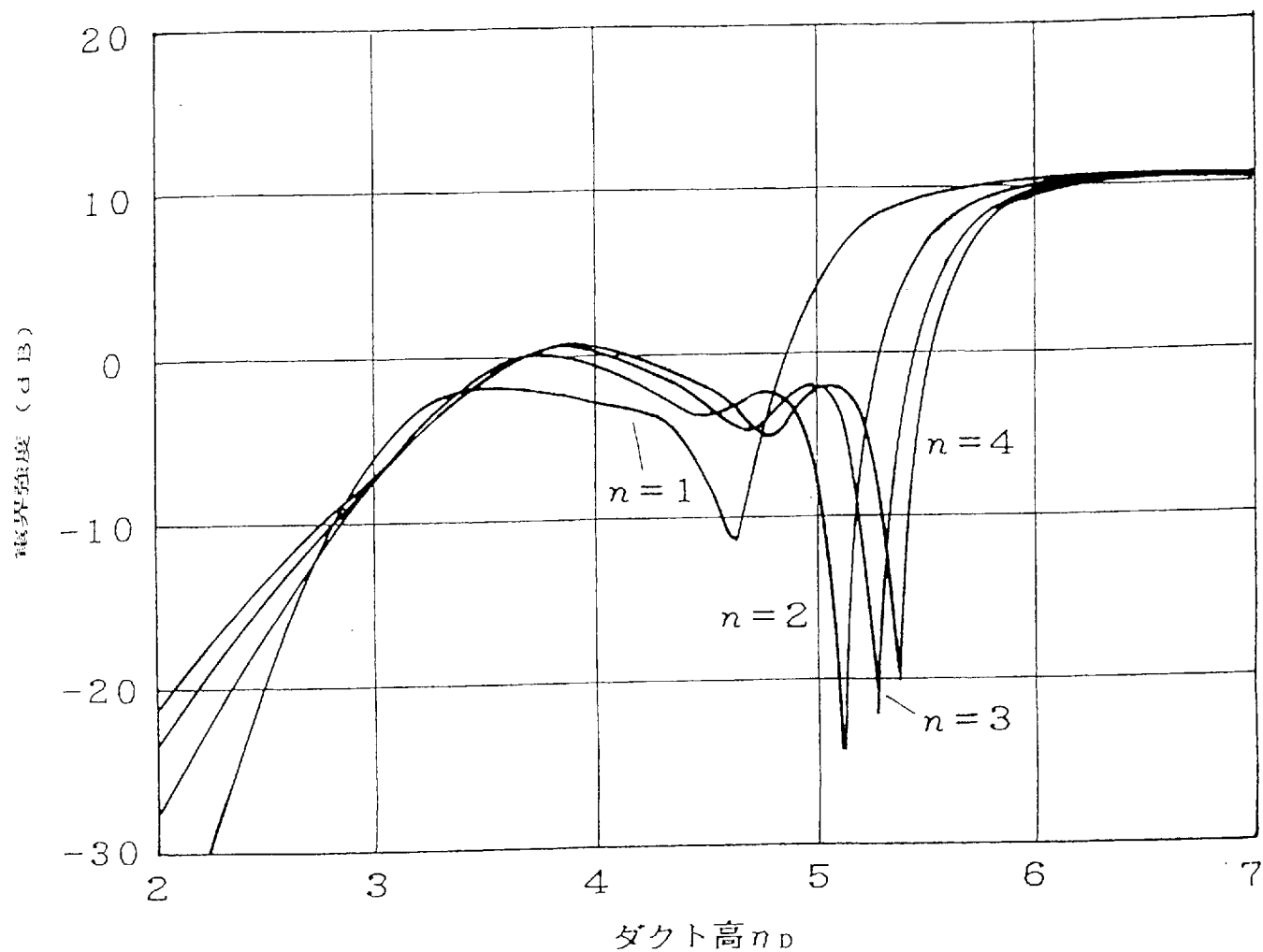


図2-58 ダクト高に対する相対受信電界強度の変動特性

ただし,  $n_s=2$ , 受信距離  $R=15$  (水平偏波)  
 地表面からの送受信高  $Z_t=Z_r=3$

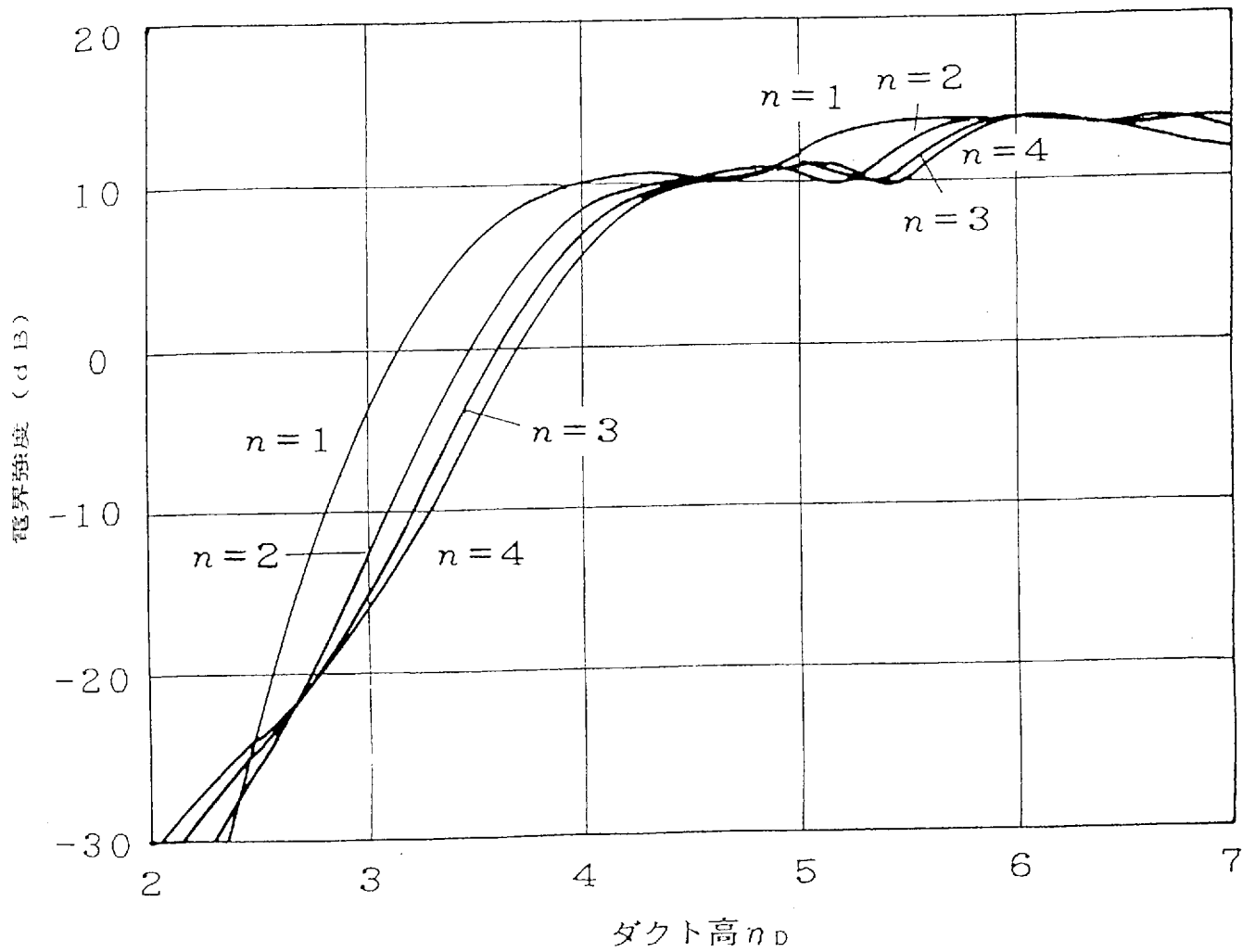


図2-59 ダクト高に対する相対受信電界強度の変動特性

ただし,  $n_s=2$ , 受信距離  $R=15$  (水平偏波)  
 地表面からの送受信高  $Z_t=Z_r=1$

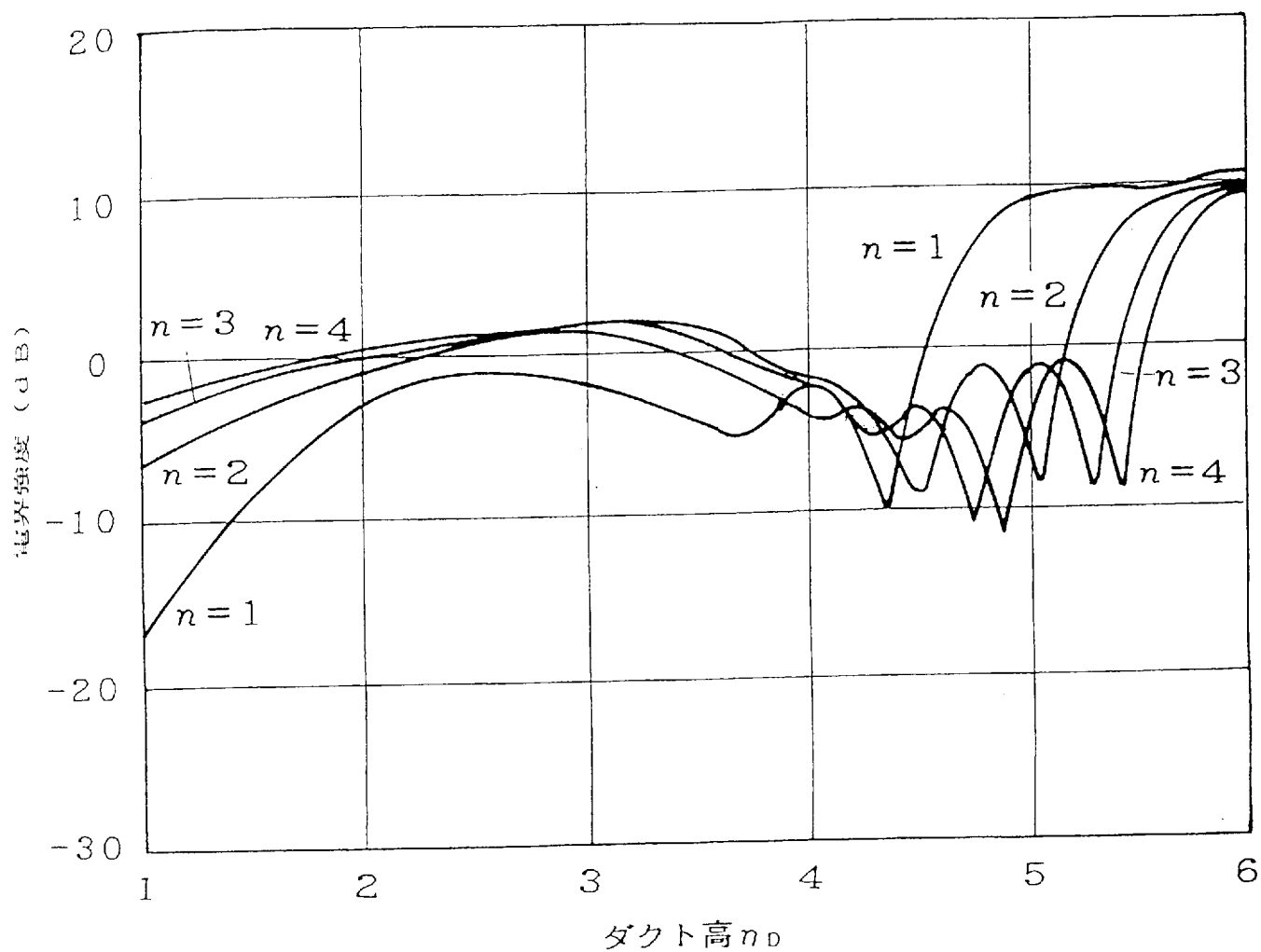


図2-60 ダクト高に対する相対受信電界強度の変動特性

ただし,  $n_s=3$ , 受信距離  $R=15$  (垂直偏波)  
 地表面からの送受信高  $Z_t=Z_r=2$

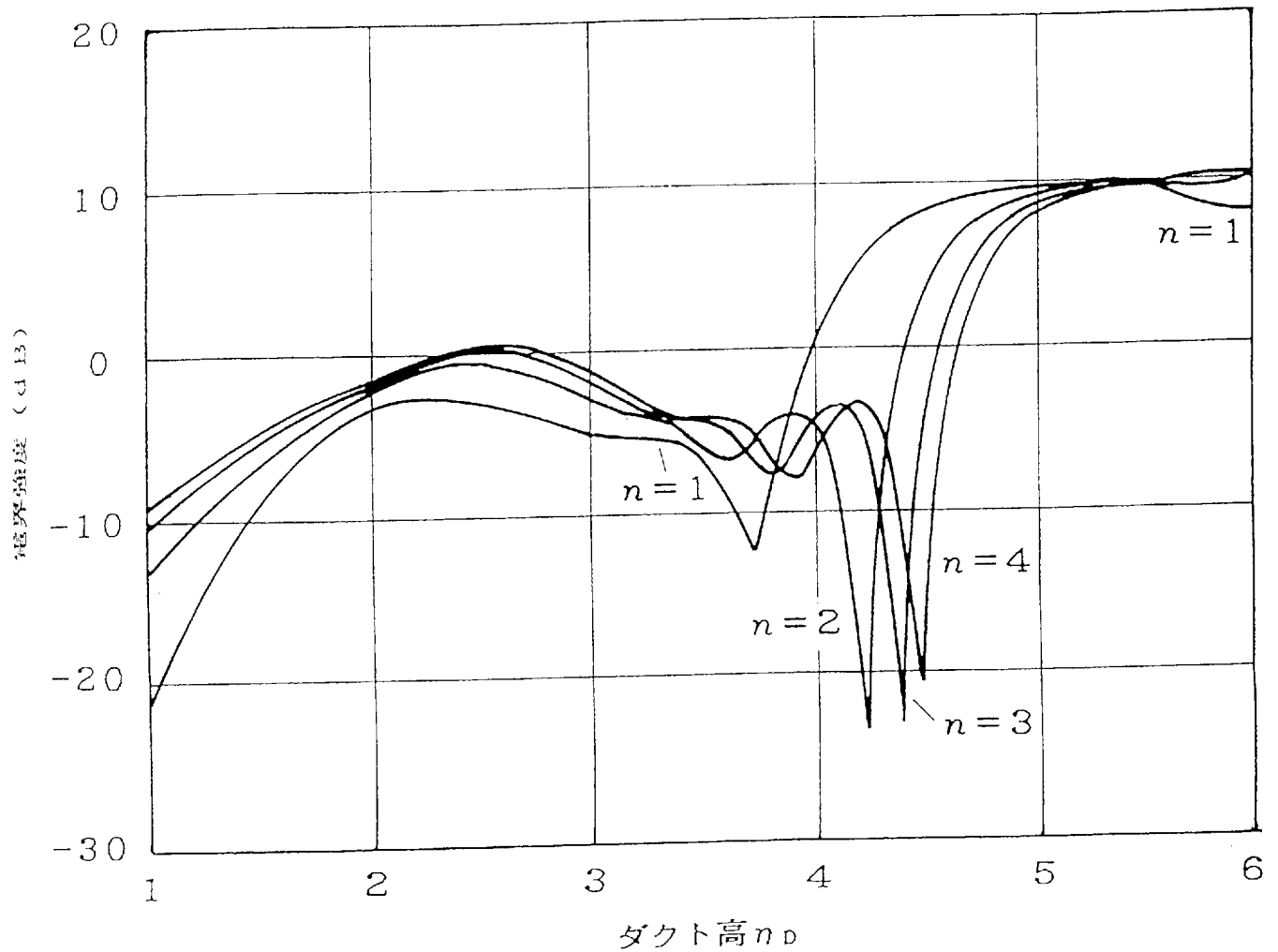


図2-61 ダクト高に対する相対受信電界強度の変動特性

ただし,  $n_s=2$ , 受信距離  $R=15$  (垂直偏波)  
 地表面からの送受信高  $Z_t=Z_r=2$

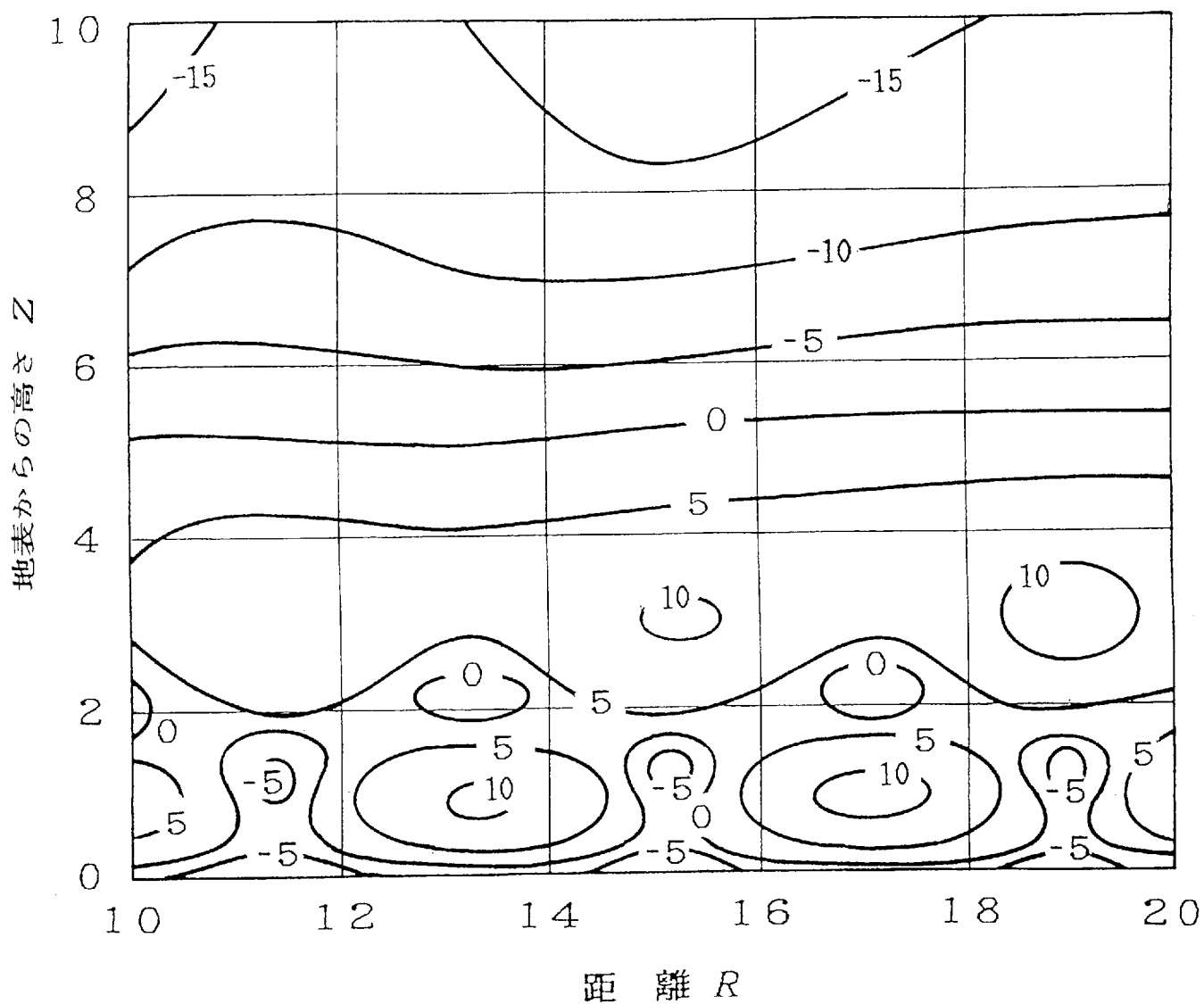


図2-62 相対電界強度の空間分布 (2乗Nプロファイル)

ただし、実線は等レベル線(数値はデシベル値)

$\eta_s = \eta_d = l = 3$ , 送信高  $Z_t = 3$  (水平偏波)

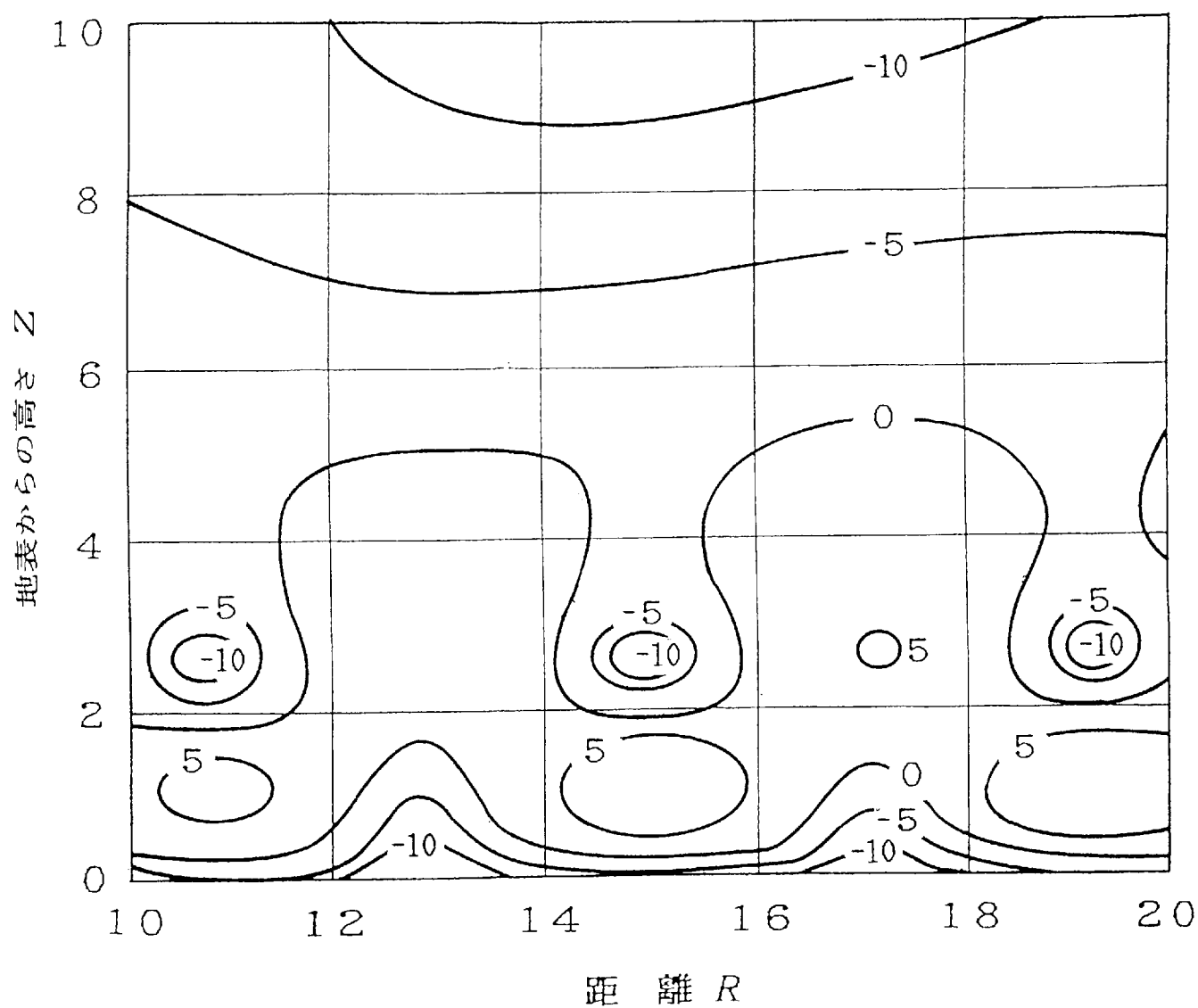


図2-63 相対電界強度の空間分布 (4乗Nプロファイル)

ただし、実線は等レベル線 (数値はデシベル値)

$\eta_s = \eta_d = l = 3$ , 送信高  $Z_t = 3$  (水平偏波)

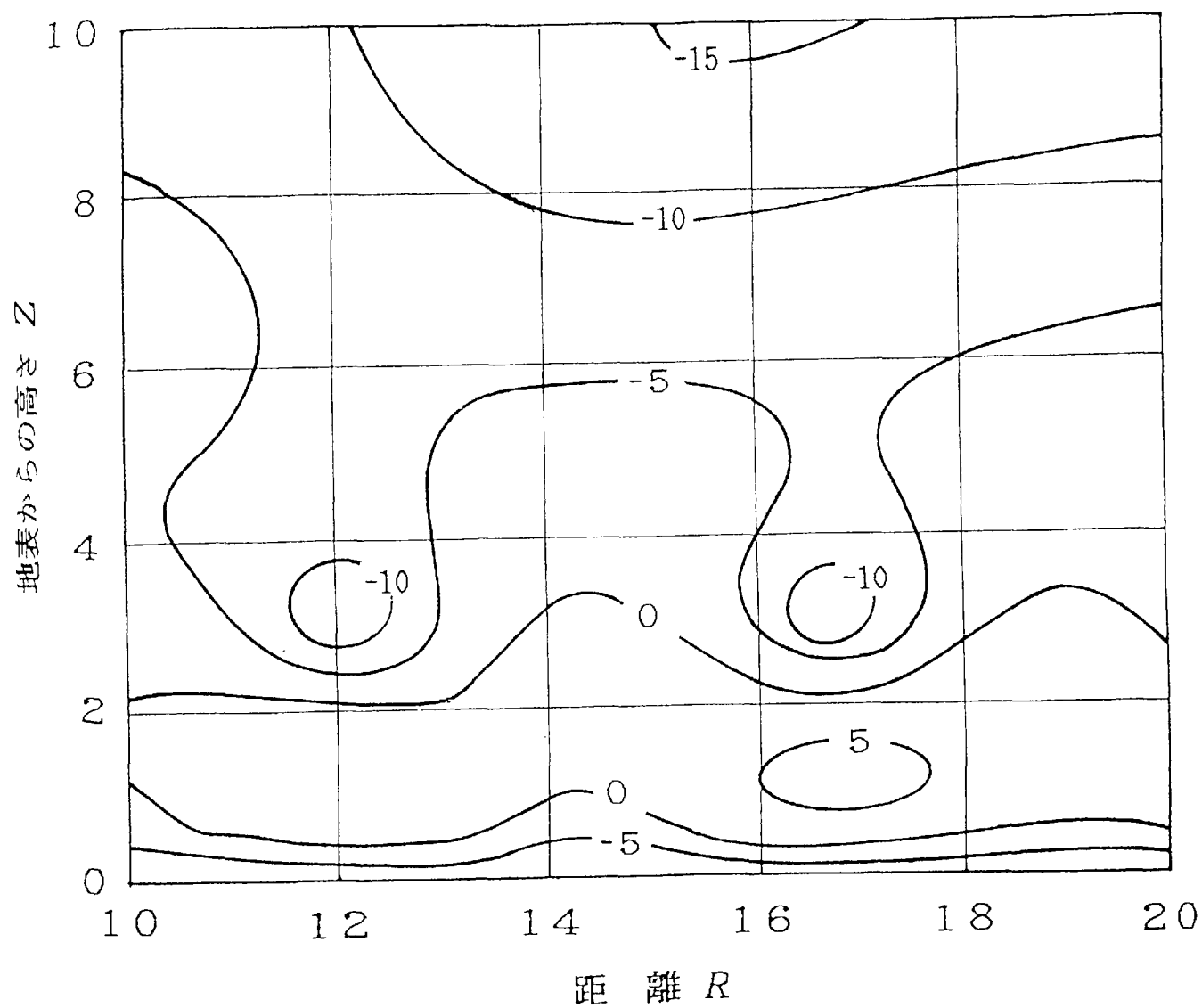


図2-64 相対電界強度の空間分布 (6乗Nプロファイル)

ただし、実線は等レベル線(数値はデシベル値)

$\eta_s = \eta_d = l = 3$ , 送信高  $Z_t = 3$  (水平偏波)

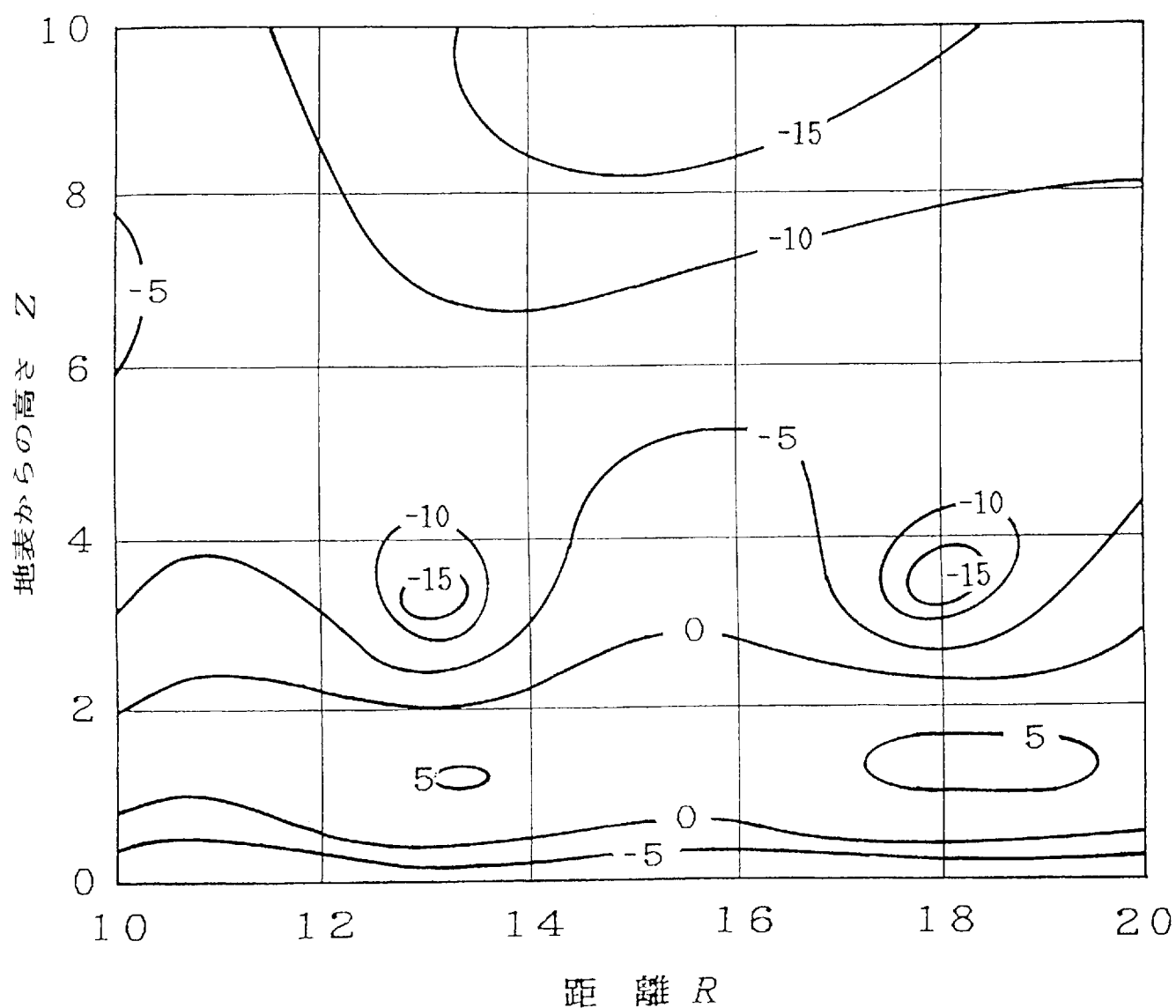


図2-65 相対電界強度の空間分布（8乗Nプロファイル）

ただし、実線は等レベル線（数値はデシベル値）

$\eta_s = \eta_d = l = 3$ ，送信高  $Z_t = 3$ （水平偏波）



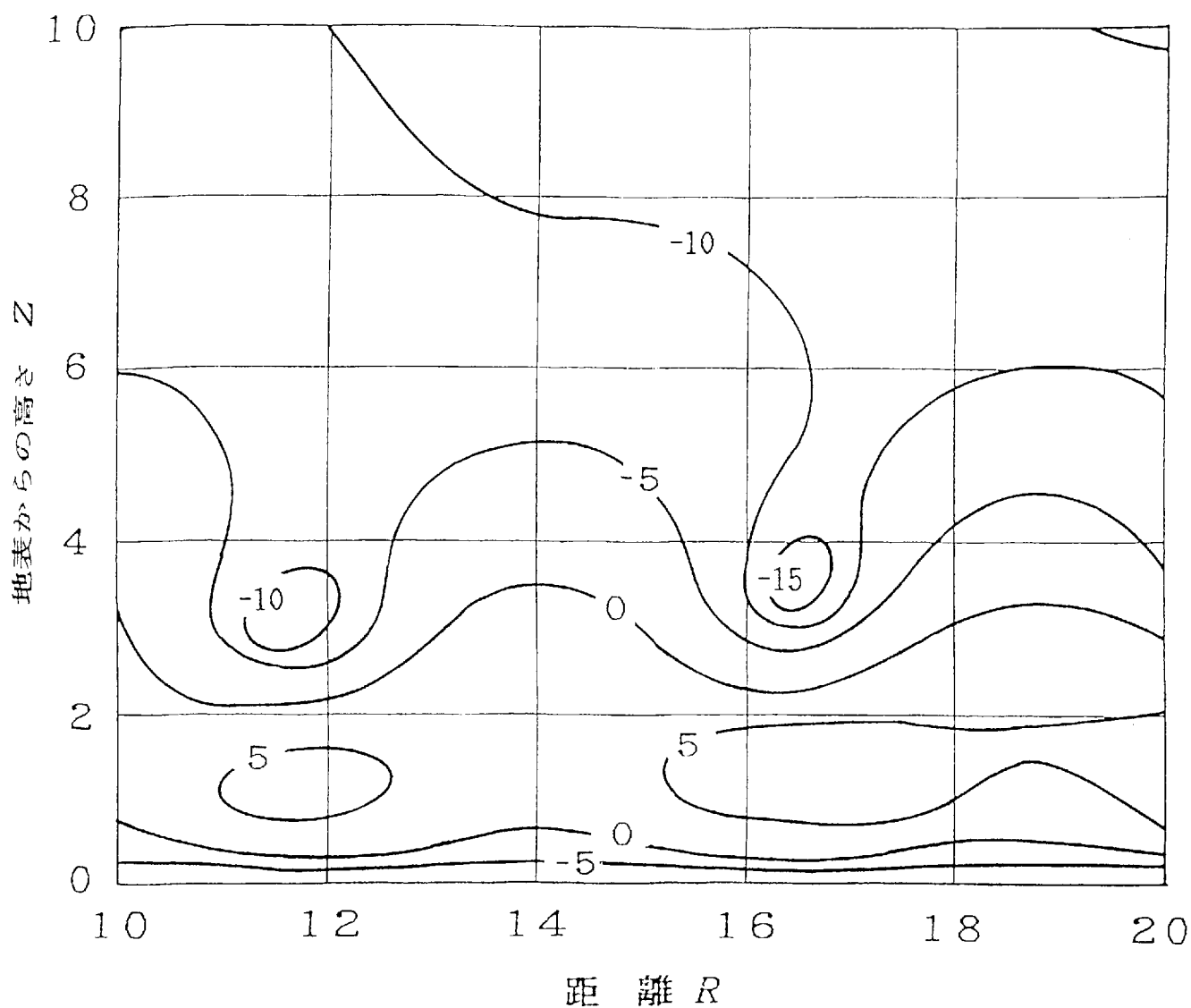


図2-66 相対電界強度の空間分布 (2乗Nプロファイル)

ただし、実線は等レベル線 (数値はデシベル値)

$\eta_s = \eta_d = 3$ ,  $l = 2$ , 送信高  $Z_t = 2$  (水平偏波)

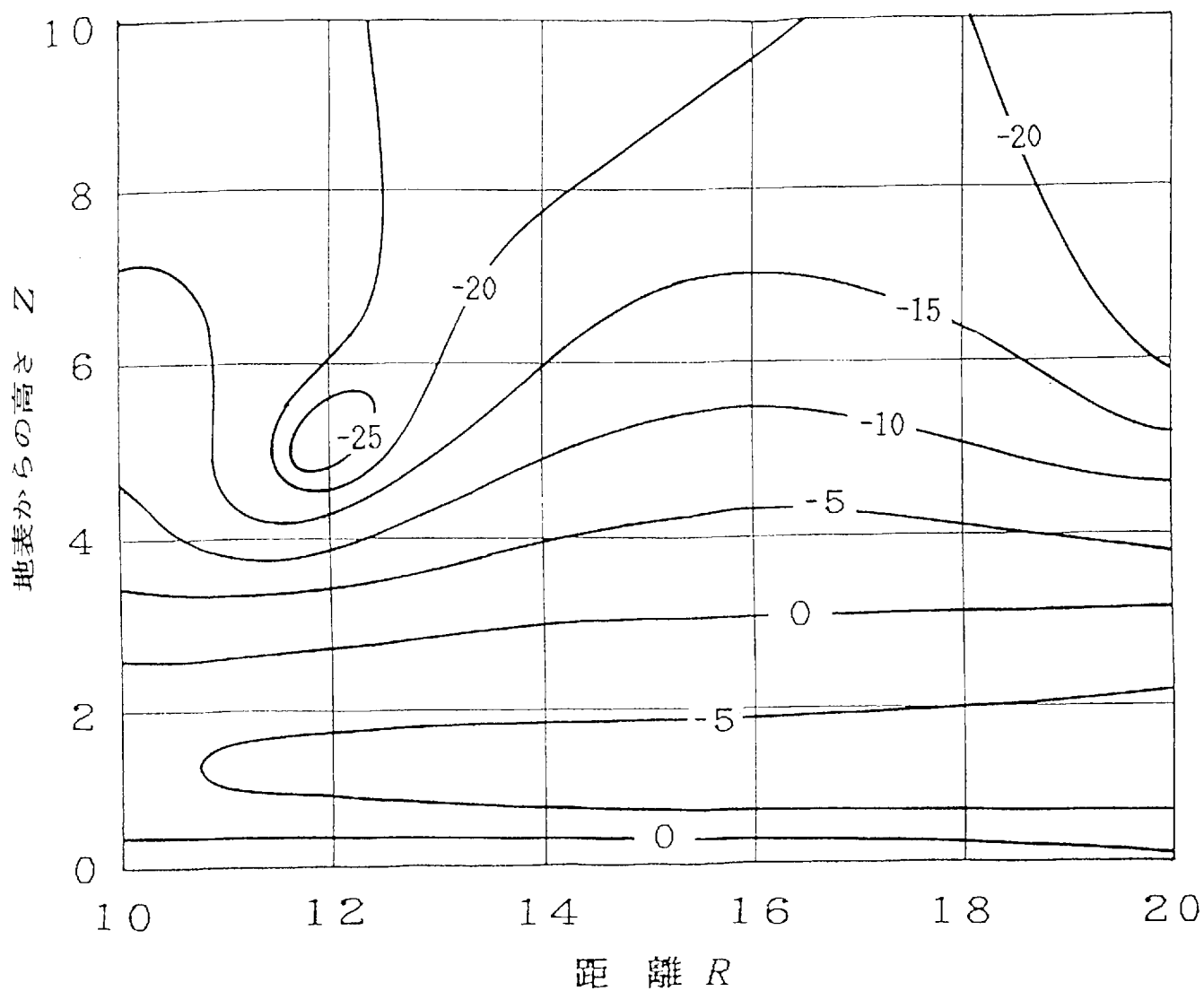


図2-67 相対電界強度の空間分布 (4乗Nプロファイル)

ただし、実線は等レベル線(数値はデシベル値)

$\eta_s = \eta_d = 3$ ,  $l = 2$ , 送信高  $Z_t = 2$  (水平偏波)

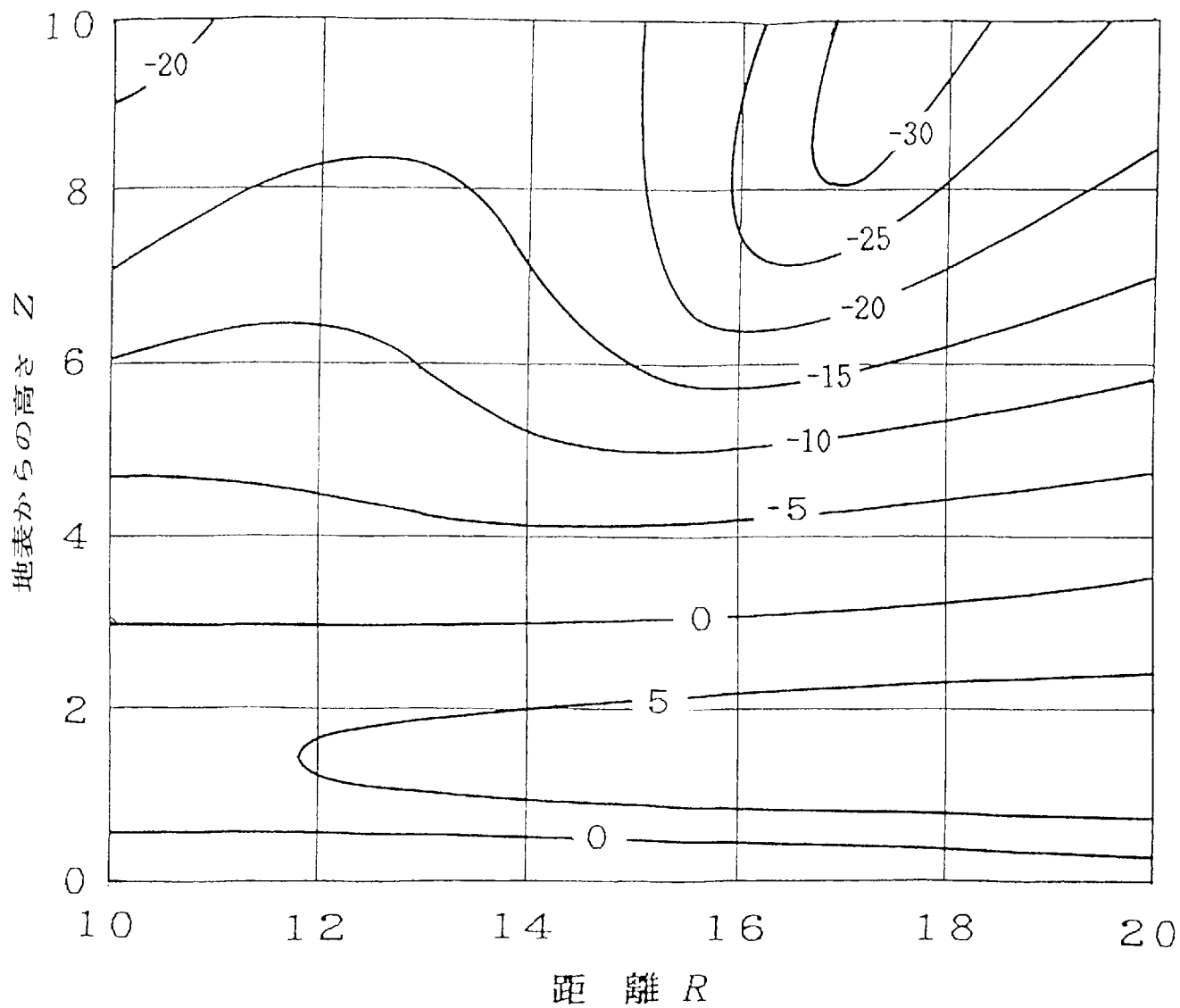


図2-68 相対電界強度の空間分布 (6乗Nプロファイル)

ただし、実線は等レベル線(数値はデシベル値)

$\eta_s = \eta_d = 3$ ,  $l = 2$ , 送信高  $Z_t = 2$  (水平偏波)

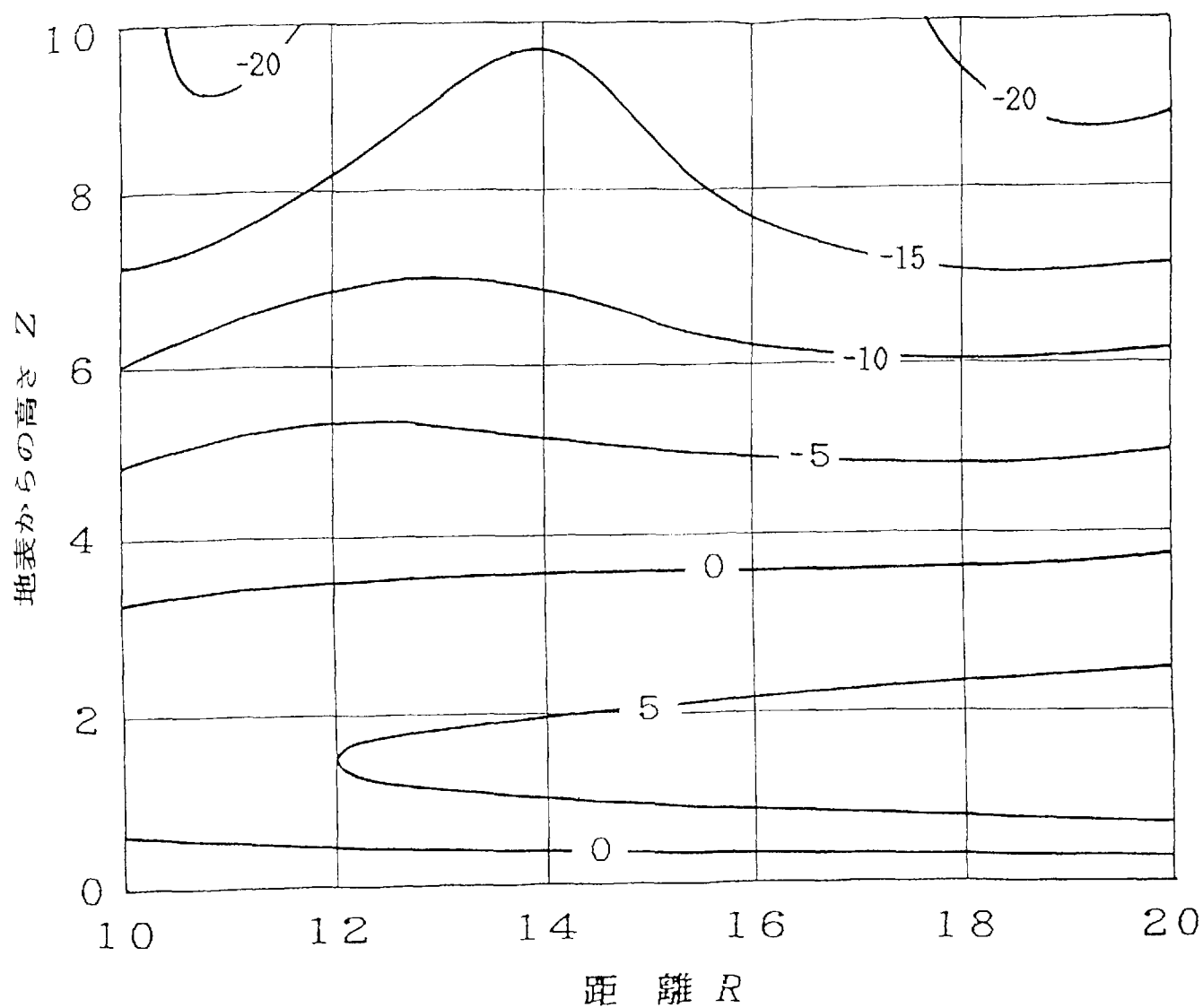


図2-69 相対電界強度の空間分布 (8乗Nプロファイル)

ただし、実線は等レベル線(数値はデシベル値)

$n_s = n_d = 3$ ,  $l = 2$ , 送信高  $Z_t = 2$  (水平偏波)

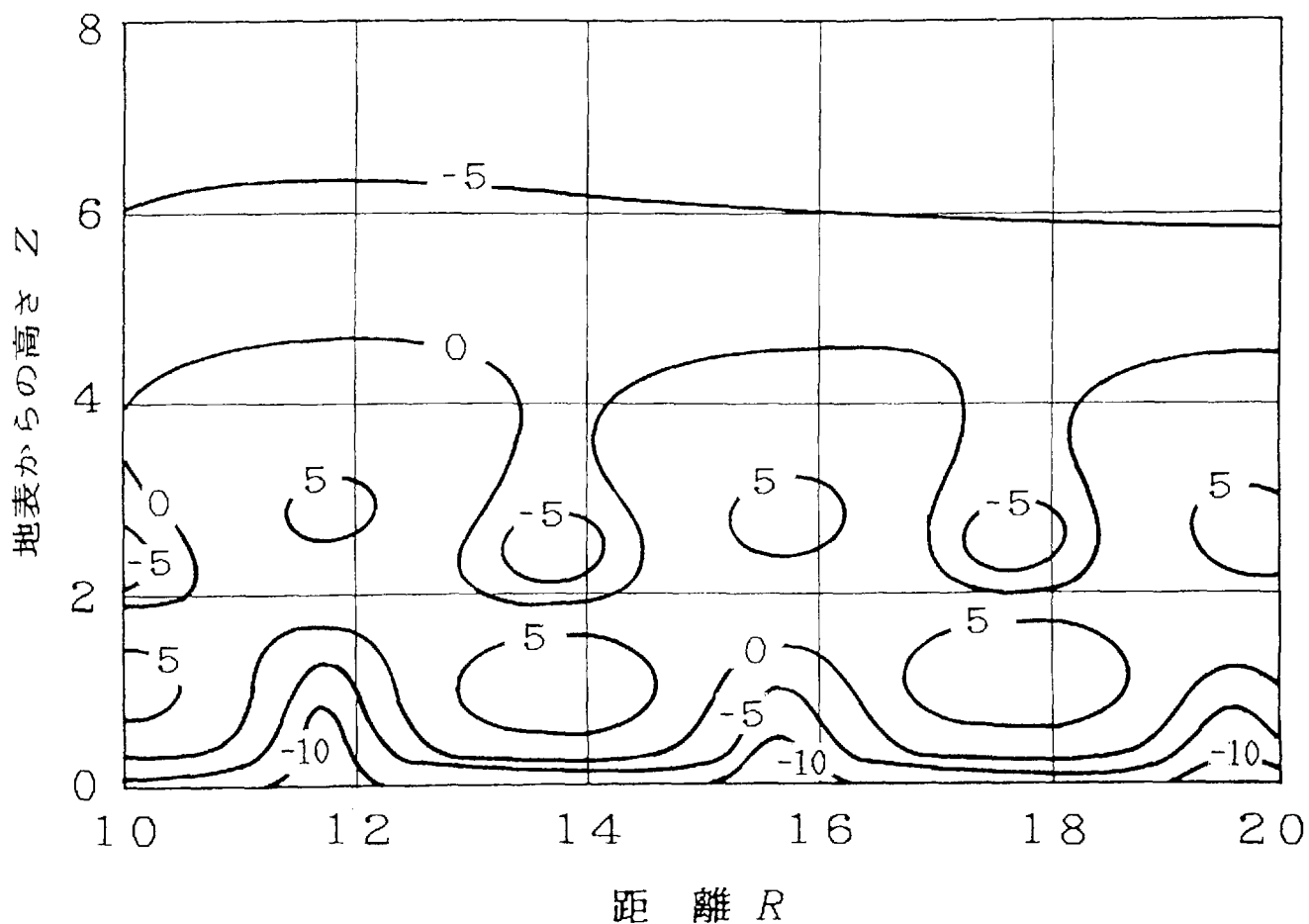


図2-70 相対電界強度の空間分布 (2乗Nプロファイル)

ただし，実線は等レベル線 (数値はデシベル値)

$n_s = n_d = 2$ ， $l = 3$ ，送信高  $Z_t = 3$  (水平偏波)。

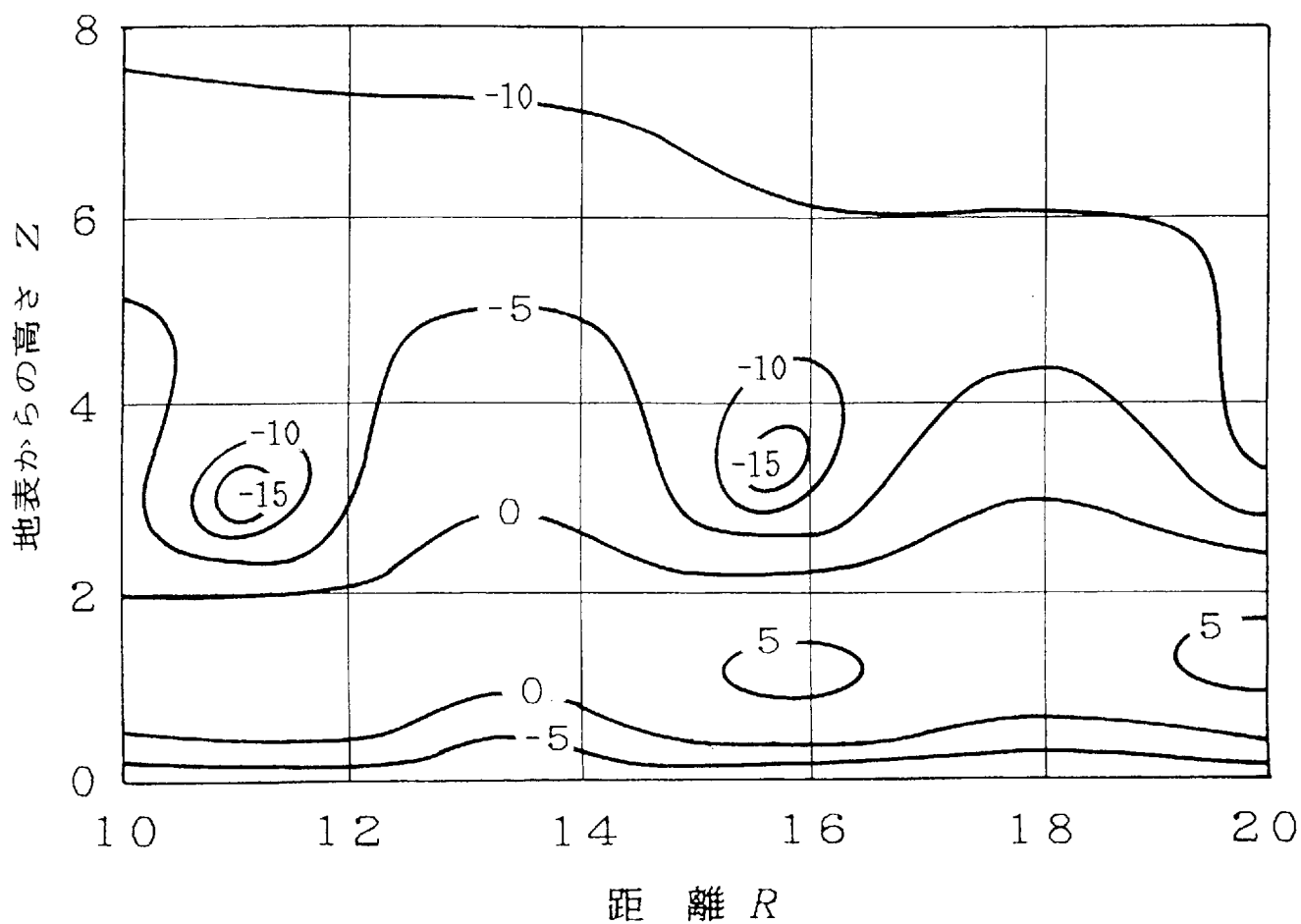


図2-7 1 相対電界強度の空間分布 (4乗Nプロファイル)

ただし, 実線は等レベル線 (数値はデシベル値)

$\eta_s = \eta_d = 2$ ,  $l = 3$ , 送信高  $Z_t = 3$  (水平偏波).

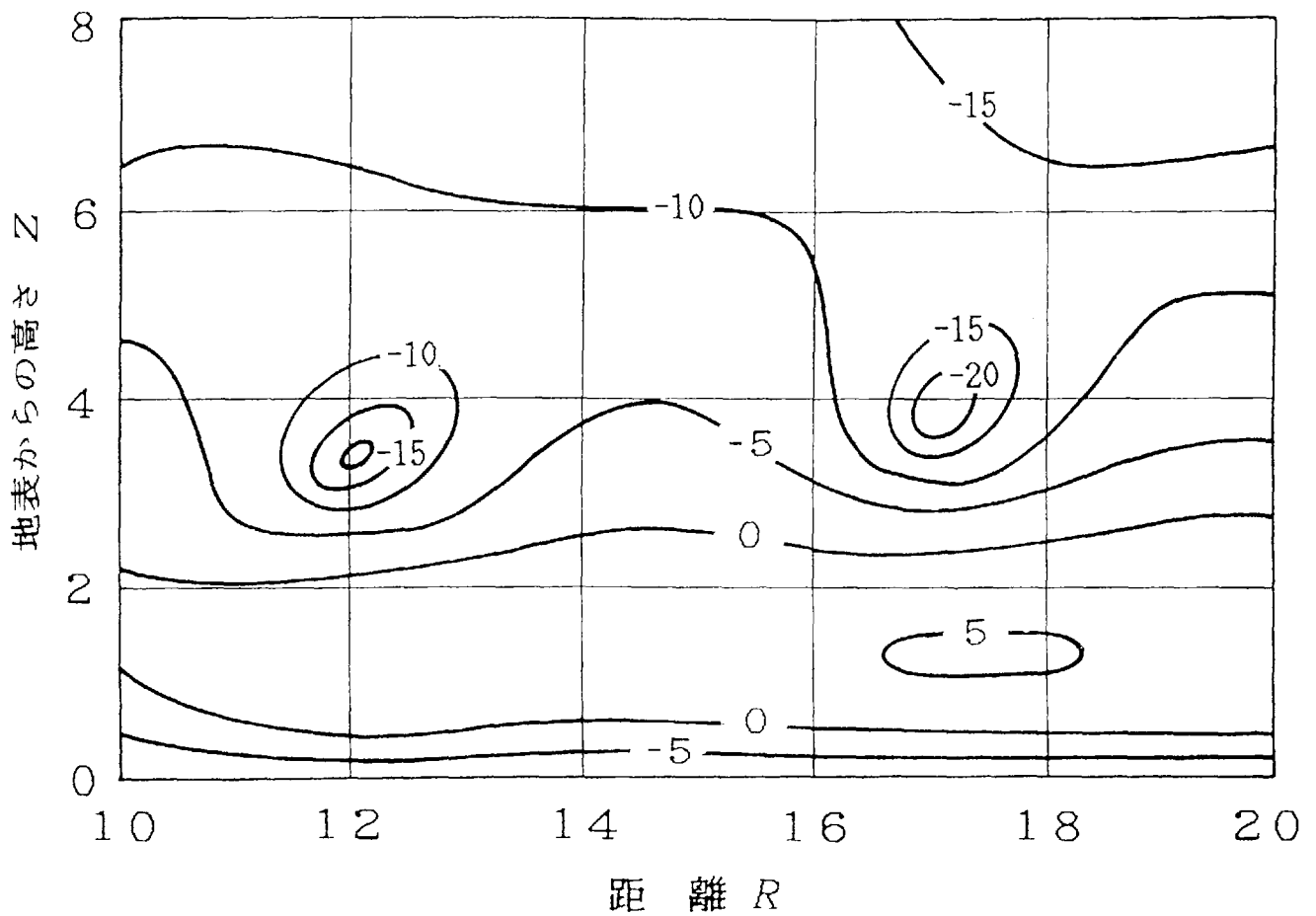


図2-72 相対電界強度の空間分布 (6乗Nプロファイル)

ただし、実線は等レベル線 (数値はデシベル値)

$\eta_s = \eta_d = 2$ ,  $l = 3$ , 送信高  $Z_t = 3$  (水平偏波).

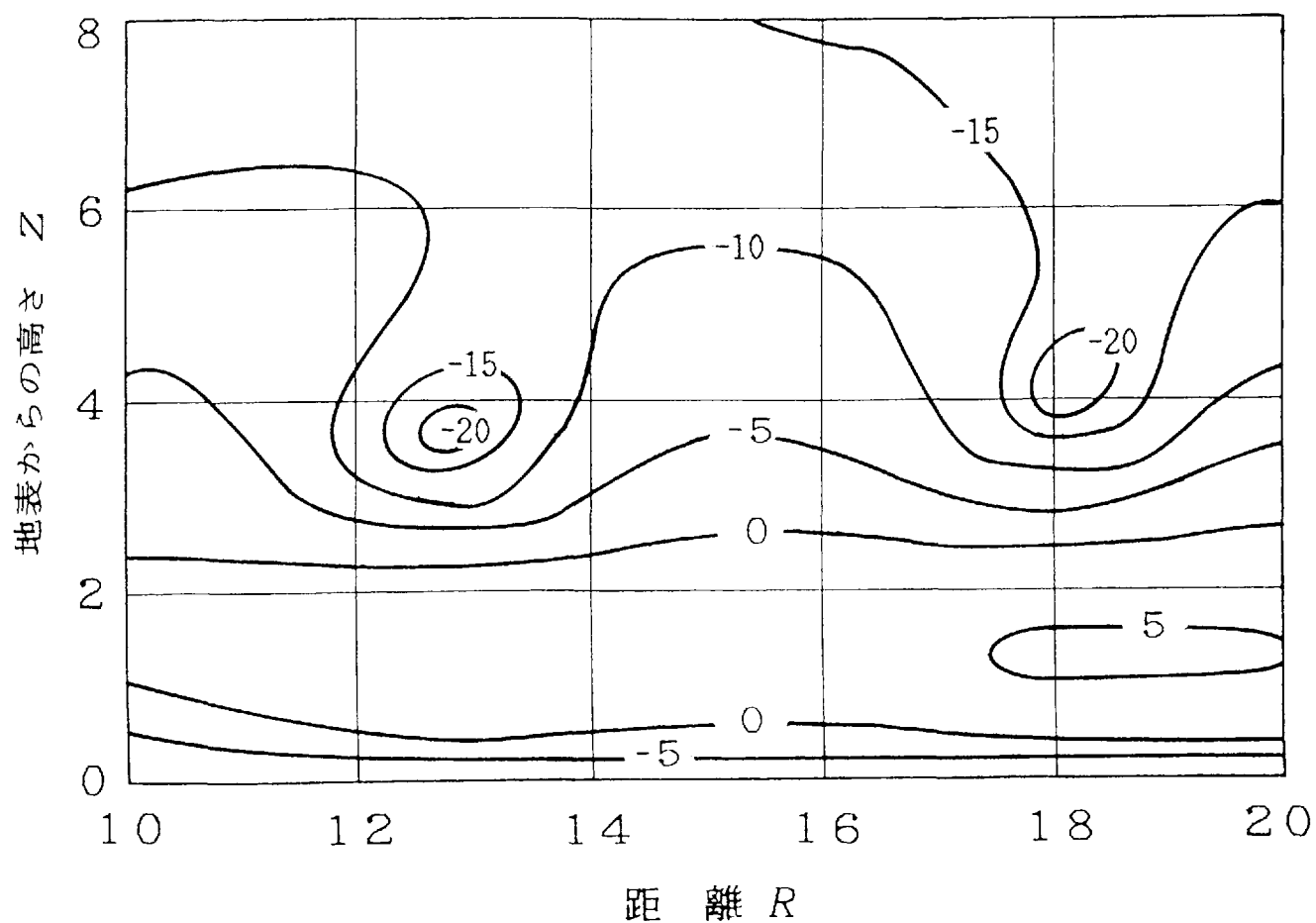


図2-73 相対電界強度の空間分布（8乗Nプロファイル）

ただし，実線は等レベル線（数値はデシベル値）

$\eta_s = \eta_d = 2$ ， $l = 3$ ，送信高  $Z_t = 3$ （水平偏波）．



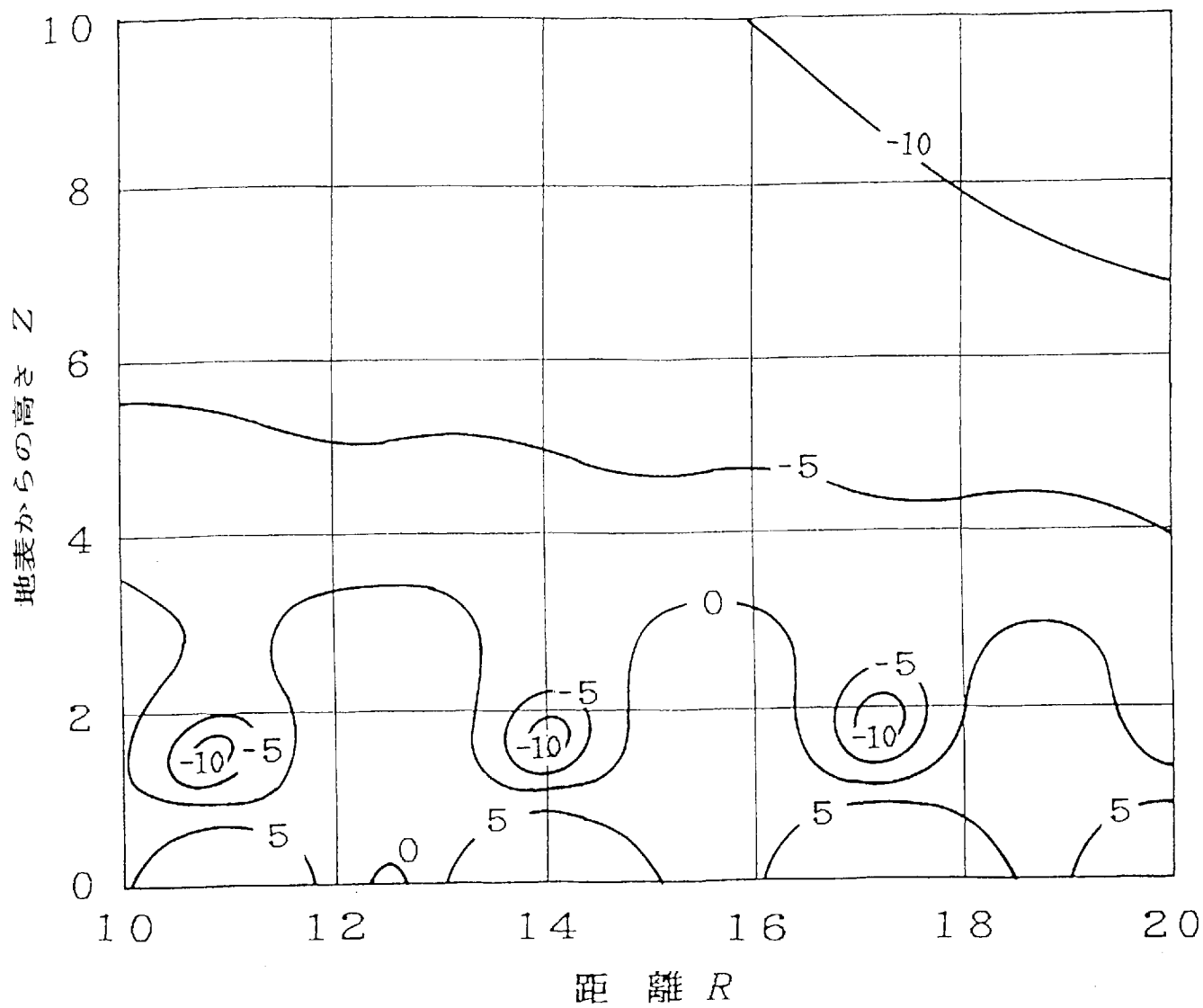


図2-74 相対電界強度の空間分布 (2乗Nプロファイル)

ただし、実線は等レベル線(数値はデシベル値)

$\eta_s = \eta_d = l = 2$ , 送信高  $Z_t = 2$  (垂直偏波)

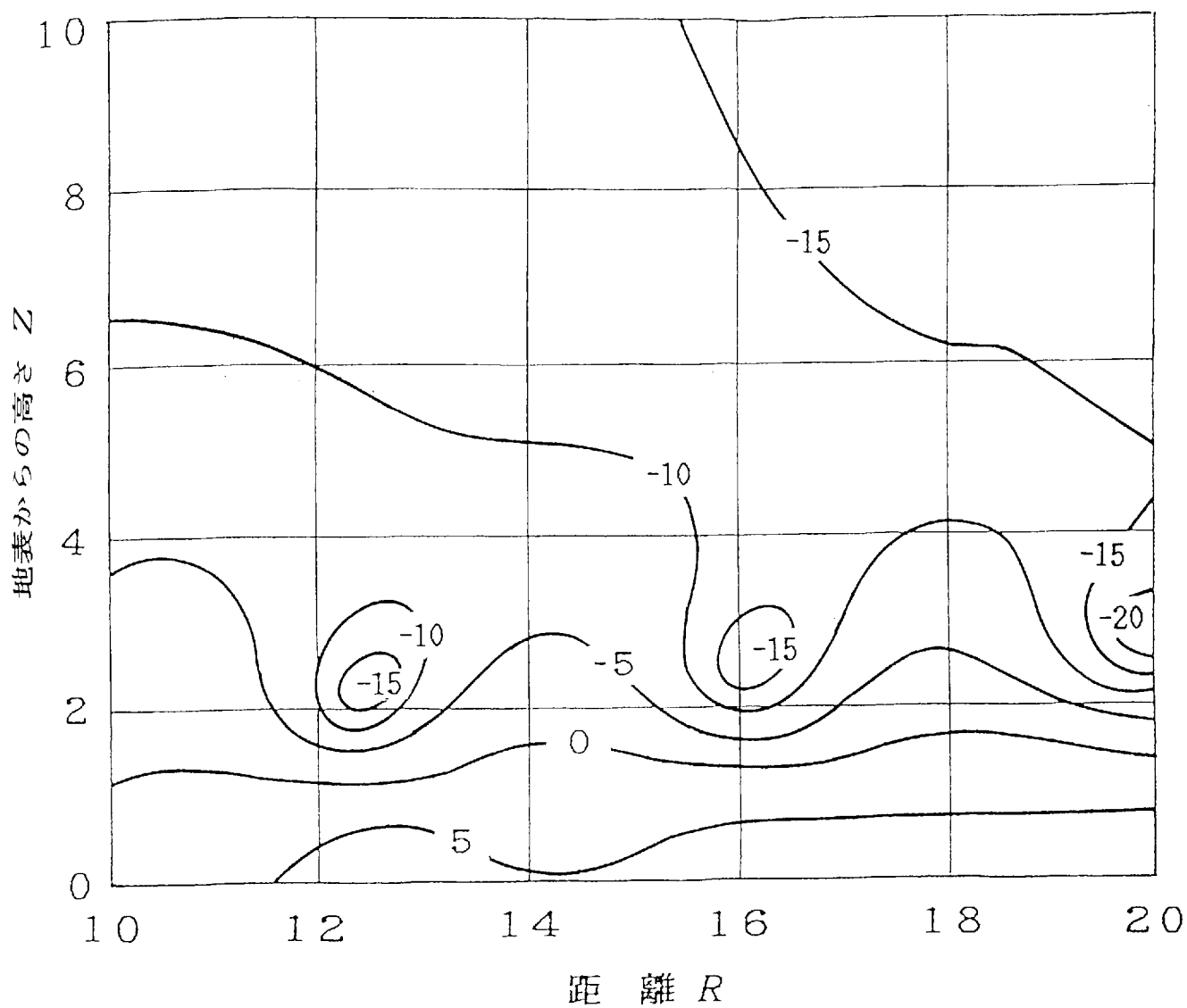


図2-75 相対電界強度の空間分布 (4乗Nプロファイル)

ただし、実線は等レベル線(数値はデシベル値)

$\eta_s = \eta_d = l = 2$ , 送信高  $Z_t = 2$  (垂直偏波)

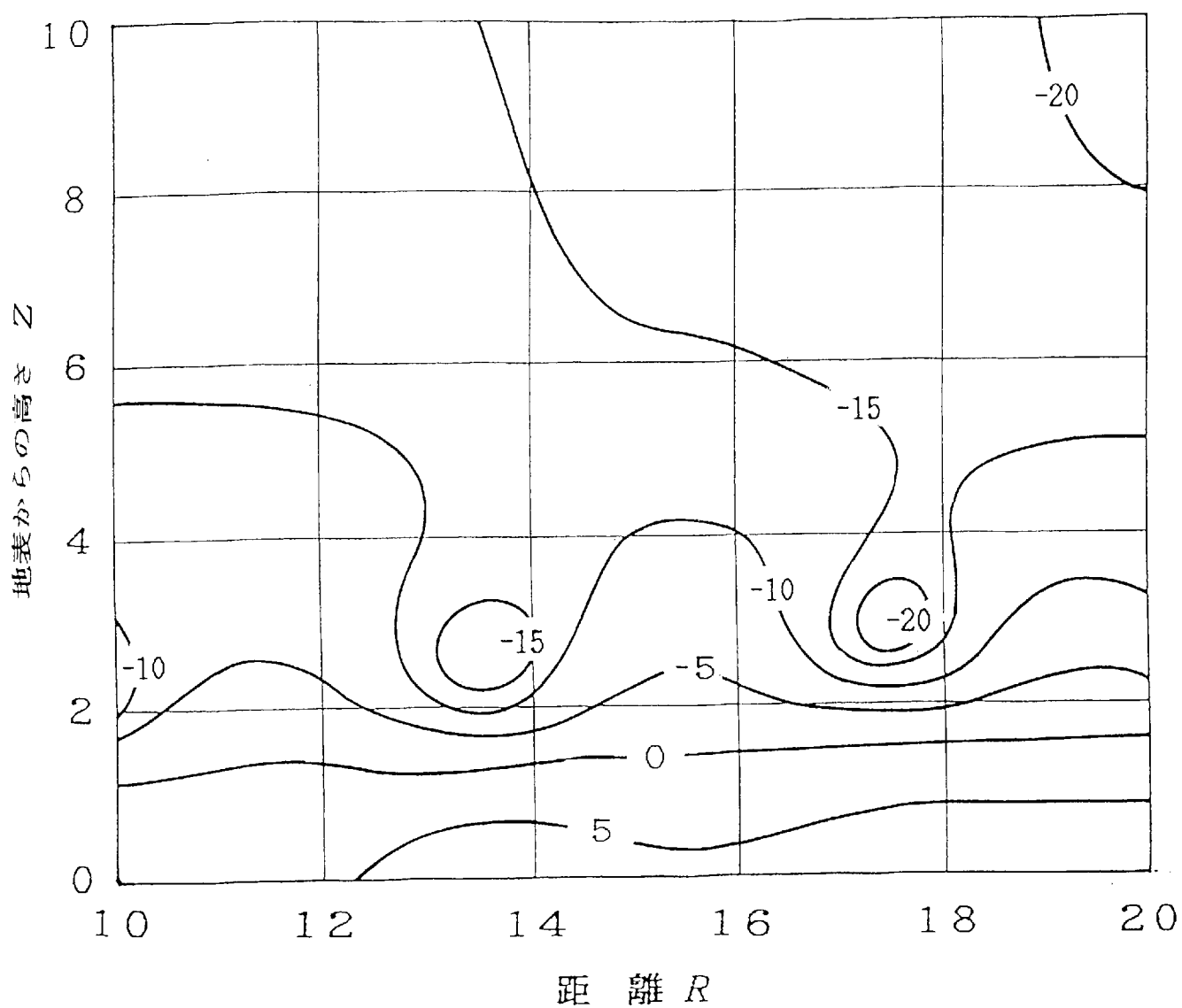


図2-76 相対電界強度の空間分布 (6乗Nプロファイル)

ただし、実線は等レベル線 (数値はデシベル値)

$\eta_s = \eta_d = l = 2$ , 送信高  $Z_t = 2$  (垂直偏波)

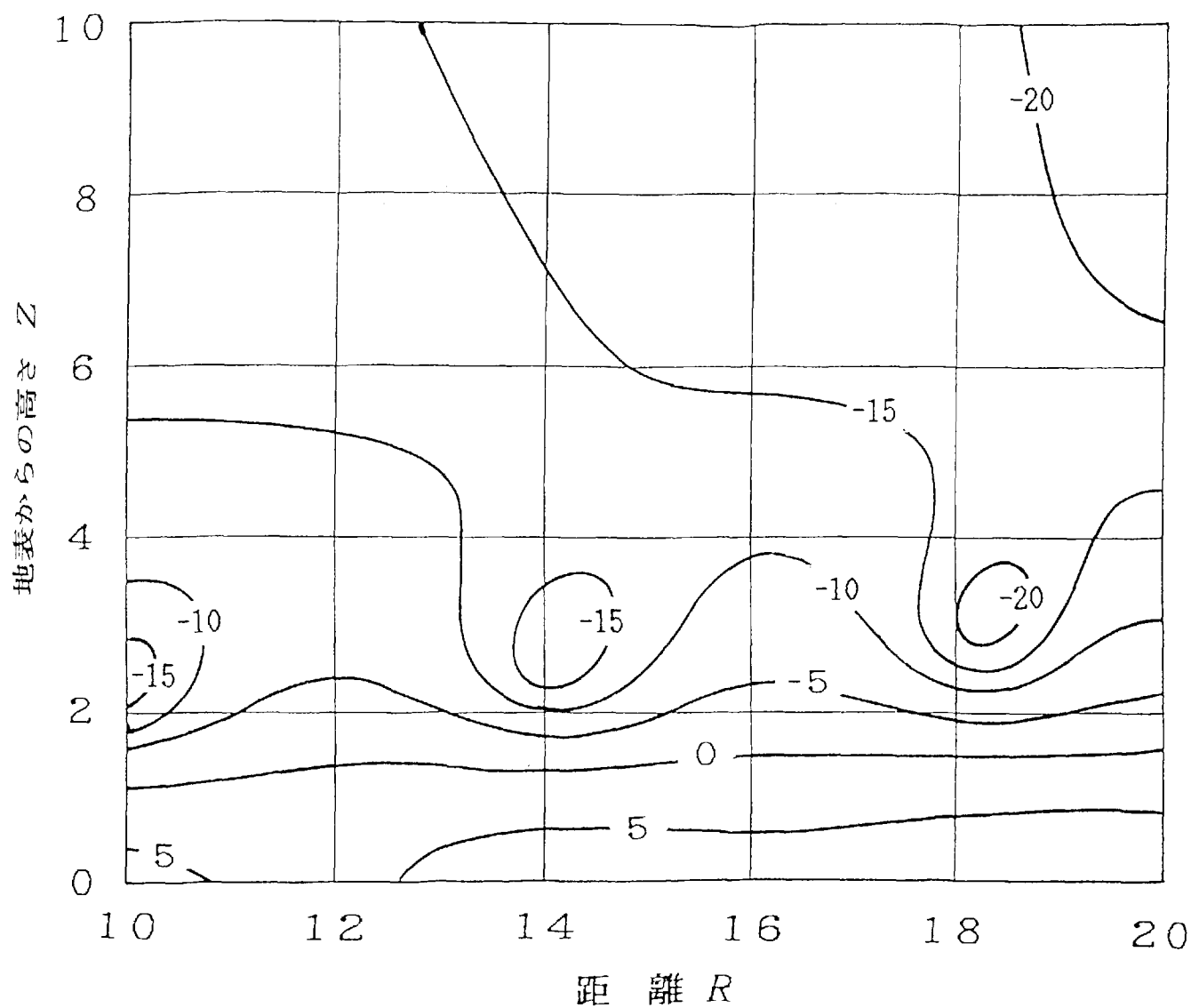


図2-77 相対電界強度の空間分布 (8乗Nプロファイル)

ただし、実線は等レベル線 (数値はデシベル値)

$\eta_s = \eta_d = l = 2$ , 送信高  $Z_t = 2$  (垂直偏波)

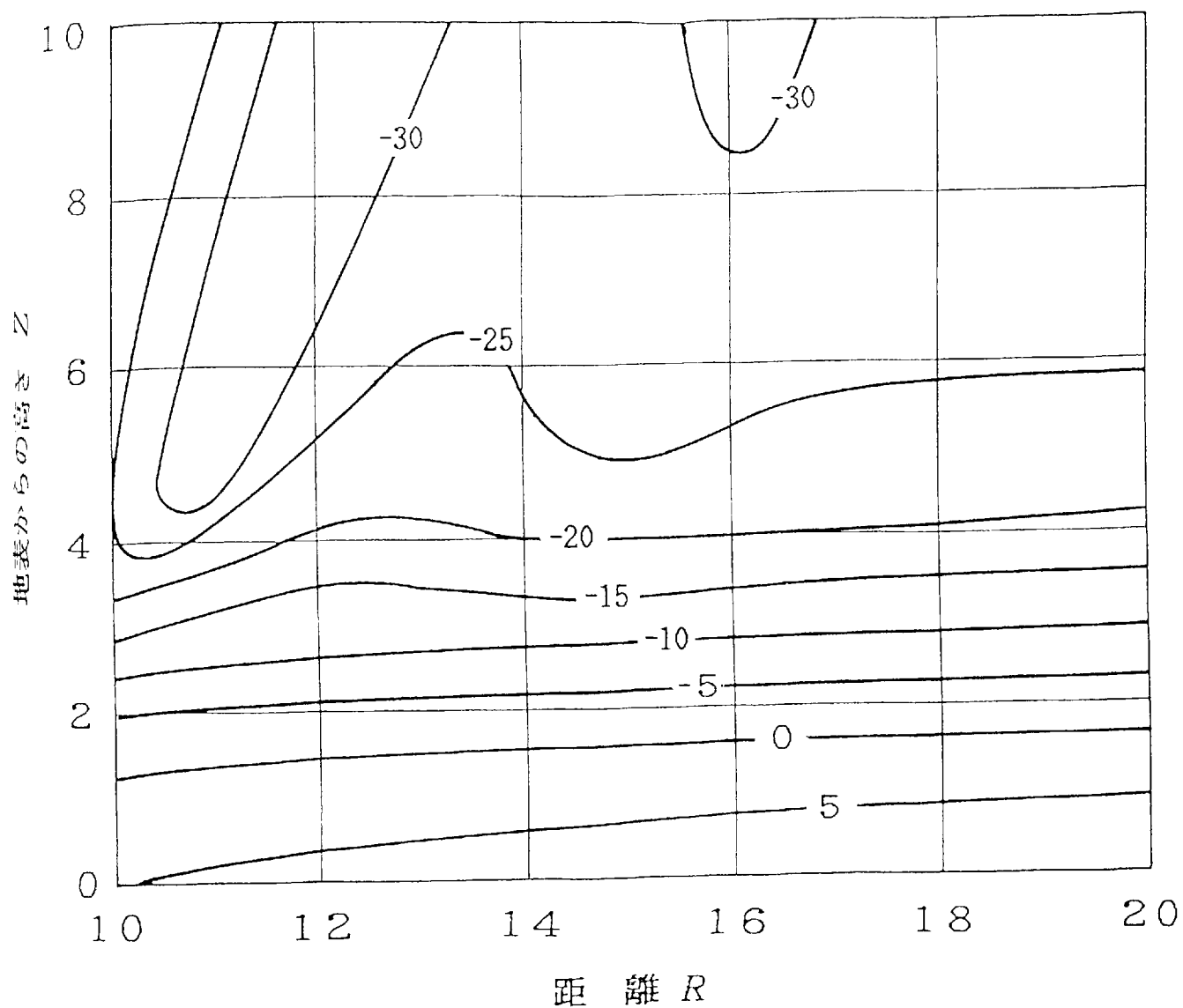


図2-78 相対電界強度の空間分布 (2乗Nプロファイル)

ただし、実線は等レベル線 (数値はデシベル値)

$\eta_s = \eta_d = 2$ ,  $l = 1$ , 送信高  $Z_t = 1$  (垂直偏波)

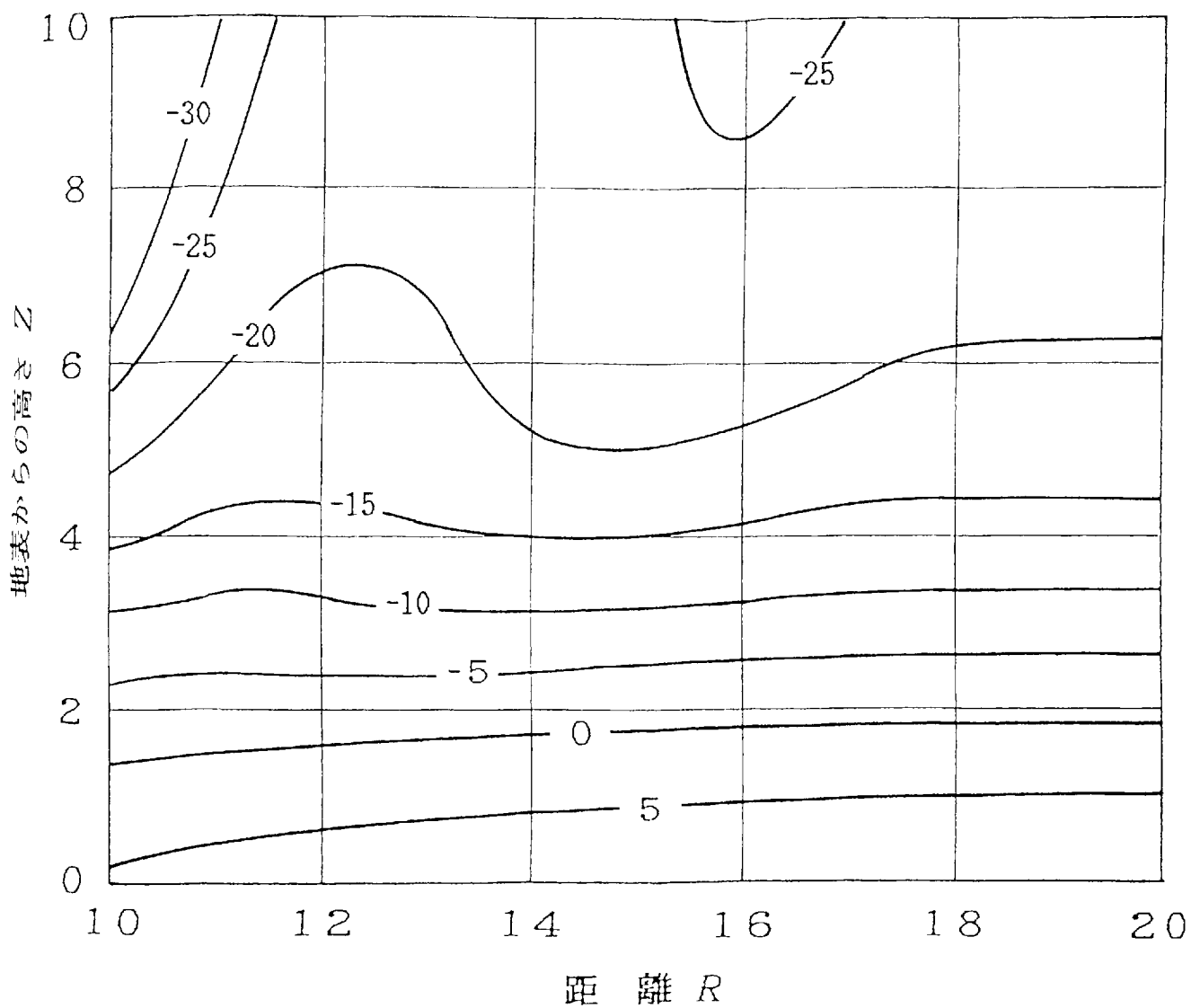


図2-79 相対電界強度の空間分布（4乗Nプロファイル）

ただし、実線は等レベル線（数値はデシベル値）

$\eta_s = \eta_d = 2$ ,  $l = 1$ , 送信高  $Z_t = 1$ （垂直偏波）

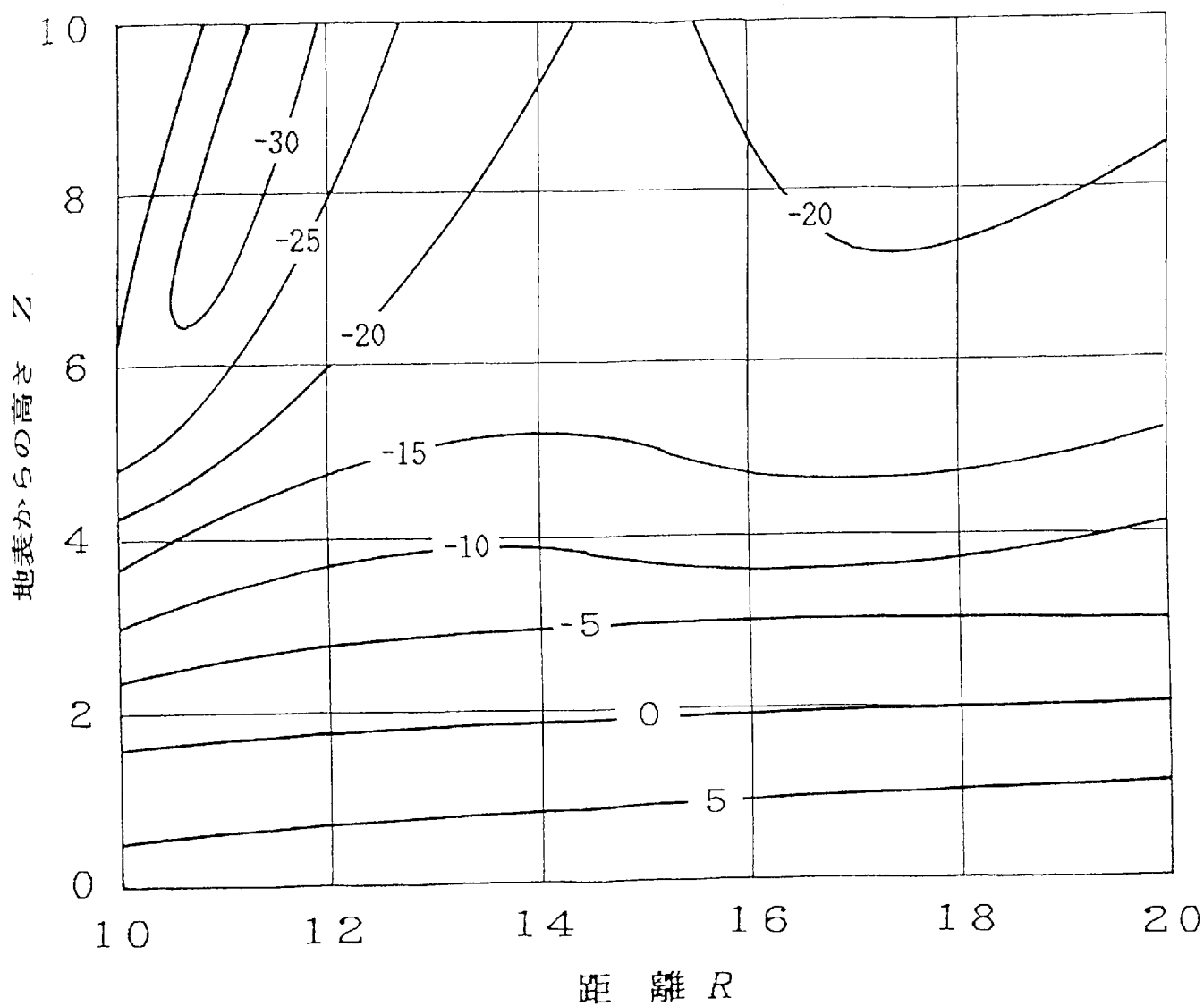


図2-80 相対電界強度の空間分布 (6乗Nプロファイル)

ただし、実線は等レベル線 (数値はデシベル値)

$\eta_s = \eta_d = 2$ ,  $l = 1$ , 送信高  $Z_t = 1$  (垂直偏波)

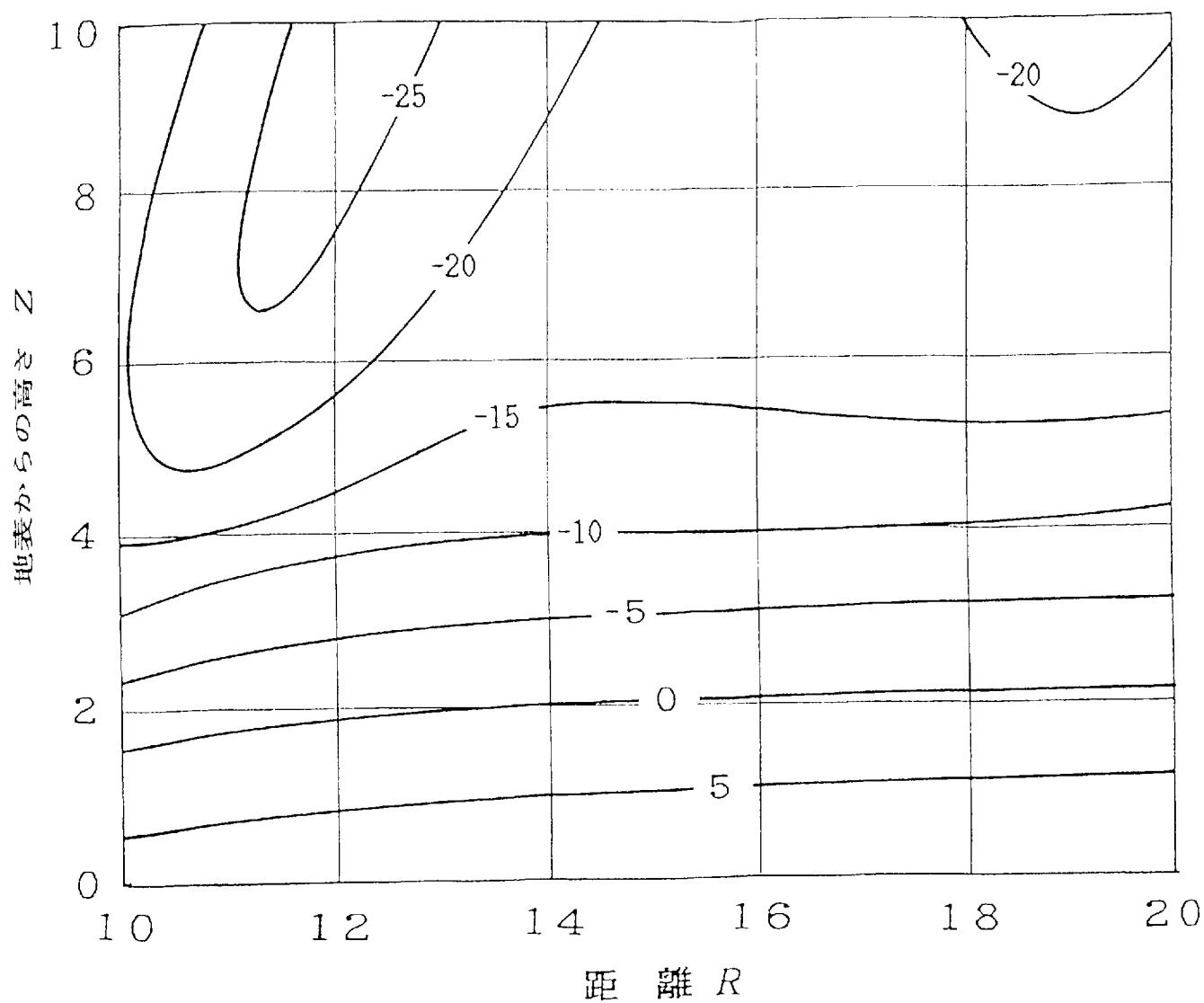


図2-81 相対電界強度の空間分布 (8乗Nプロファイル)

ただし、実線は等レベル線(数値はデシベル値)

$n_s = n_d = 2$ ,  $l = 1$ , 送信高  $Z_t = 1$  (垂直偏波)



## 第 3 章 2 $n$ 乗 N プロファイルをもつ 不均一ダクト

### 3. 1 結合係数

#### 3. 1. 1 水平偏波

前章と同様平面化した地表面を  $(r, \theta, -z_e)$  面とする円筒座標を考え、鉛直上向きに  $z$  軸の正方向をとる。送受信点の座標をそれぞれ  $(0, 0, z_1)$ ,  $(r, \theta, z)$  とし、波源を  $z$  軸方向の微小磁気ダイポールに選び、磁気型ヘルツ・ベクトルの  $z$  成分を  $\psi$  (波動関数) で表すことにすると、電磁界成分は

$$\begin{aligned} E_\theta &= j\omega\mu \frac{\partial \psi}{\partial r} \\ H_r &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} \\ H_z &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k_0^2 \psi \end{aligned} \quad (3-1)$$

で与えられる。従って、これは水平偏波の場合である。但し、 $\omega$  は角周波数、 $k_0$  は伝搬定数 ( $= \omega\sqrt{\epsilon\mu}$ )、また  $\epsilon, \mu$  はそれぞれ大気誘電率および透磁率である。なお、時間因子に  $\exp(j\omega t)$  を採用している。

次に、ヘルツ・ベクトルの  $z$  成分  $\psi$  が

$$\psi = A(r)U(z, r) \quad (3-2)$$

で与えられるものとする。但し、 $U(z, r)$  は距離  $r$  での高さ  $z$  に依存する高度分布

関数であり，微分方程式

$$\frac{d^2 U(z)}{dz^2} + [k_0^2 N^2(z) - \kappa^2] U(z) = 0 \quad (3-3)$$

を満足する．但し， $N(z)$ は距離 $r$ での修正屈折率， $\kappa$ は分離定数であり，ここに $k_0 N(0) = k_0$ とする．また， $\Lambda(r)$ は $\psi$ の振幅値であり，

$$\begin{aligned} \Lambda(r) &= \tau_0(r) e^{-j\beta(r)} \\ \beta(r) &= \kappa r + \phi_0 \end{aligned} \quad (3-4)$$

とする．但し， $\phi_0$ は位相定数である．また，

$$\frac{\partial}{\partial r} \approx -j\kappa, \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 \approx k_0^2 \quad (3-5)$$

で近似できるものとする． $E_\theta, H_z$ は

$$E_\theta \approx \omega \mu \kappa \psi, \quad H_z \approx k_0^2 \psi \quad (3-6)$$

となる．

ここで，距離 $r = r_k (>> 1)$ で高さ方向の屈折率分布がわずかに異なる大気を考える．図3-1に示すように，接続点 $r_{k+1} (> r_k)$ からの反射波の到来も考慮に入れると，境界面 $r = r_k$ では伝搬モードの総和からなる電磁界成分 $E_\theta, H_z$ の連続性より

$$\sum_{i=1}^{\infty} \kappa_{ik} \tilde{\psi}_{ik} - \sum_{i=1}^{\infty} \kappa_{ik} \tilde{\psi}_{ik}^R + e^{\text{ref}} = \sum_{i=1}^{\infty} \kappa_{ik+1} \tilde{\psi}_{ik+1} - \sum_{i=1}^{\infty} \kappa_{ik+1} \tilde{\psi}_{ik+1}^R + e^{\text{trans}} \quad (3-7a)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\psi}_{ik} + \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\psi}_{ik}^R + h^{\text{ref}} = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\psi}_{ik+1} + \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\psi}_{ik+1}^R + h^{\text{trans}} \quad (3-7b)$$

が得られる．ここに，固有値 $\kappa_i$ で決定される第 $i$ モードのヘルツ・ベクトル(3-2)を $\psi_i$ ，その振幅値(3-4)を $\Lambda_i$ ，微分方程式(3-3)を満たす高度分布関数を $U_i$ で表し，距離 $r = r_k$ での $\psi_i$ はそれぞれ $\tilde{\psi}_i$ と $\sim$ 線を施し

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{ik} &= \Lambda_{ik}(r_k) U_{ik}(z, r_k) \\ \tilde{\psi}_{ik}^R &= \Lambda_{ik}^R(r_k) U_{ik}(z, r_k) \\ \tilde{\psi}_{ik+1} &= \Lambda_{ik+1}(r_k) U_{ik+1}(z, r_k) \\ \tilde{\psi}_{ik+1}^R &= \Lambda_{ik+1}^R(r_k) U_{ik+1}(z, r_k) \end{aligned} \quad (3-8)$$

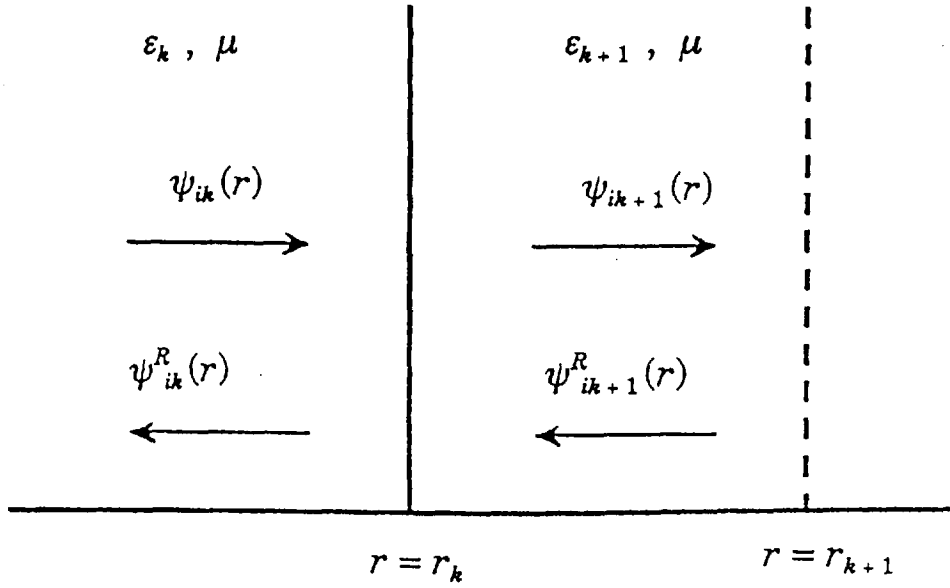


図3-1 不均一大気内のヘルツ・ベクトル

としている。但し、 $\tilde{\psi}_{ik}, \tilde{\psi}_{ik+1}$  はそれぞれ接続点  $r_k$  への入射波および接続点  $r_k$  からの透過波、つまり添字  $k+1$  は区間  $r_k \leq r \leq r_{k+1}$  を表し、式(3-7)の固有値  $\kappa_{ik}, \kappa_{ik+1}$  の添字もこれに従う。また、添字  $R$  は  $-r$  方向への進行波を表す。なお、 $e^{\text{ref}}, e^{\text{trans}}$  は接続点  $r_k$  から生ずる放射波などの非導波モードの電界成分、そして  $h^{\text{ref}}$  および  $h^{\text{trans}}$  は磁界成分である。

任意のモード  $i$  から第  $j$  モードを選び、その透過波  $\tilde{\psi}_{jk+1}$  を式(3-7a), (3-7b)に乘じて高さ  $z$  で積分すると、

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{\infty} \kappa_{ik} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}_{ik} \tilde{\psi}_{jk+1} dz - \sum_{i=1}^{\infty} \kappa_{ik} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}_{ik}^R \tilde{\psi}_{jk+1} dz \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \kappa_{ik+1} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}_{ik+1} \tilde{\psi}_{jk+1} dz - \sum_{i=1}^{\infty} \kappa_{ik+1} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}_{ik+1}^R \tilde{\psi}_{jk+1} dz \end{aligned} \quad (3-9a)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}_{ik} \tilde{\psi}_{jk+1} dz + \sum_{i=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}_{ik}^R \tilde{\psi}_{jk+1} dz \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}_{ik+1} \tilde{\psi}_{jk+1} dz + \sum_{i=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}_{ik+1}^R \tilde{\psi}_{jk+1} dz \end{aligned} \quad (3-9b)$$

となる。但し、隣接する大気間の屈折率差がわずかである場合、その接続点から生ずる放射モードは導波モードに比べて極めて少ないと考えてよく、このことから両者の積分は省略している。

ここで、 $(3-9a) \pm (3-9b) \times \kappa_{jk+1}$  を作り式(3-8)を用いて整理すると、

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ (\kappa_{ik} \pm \kappa_{jk+1}) \Lambda_{ik} - (\kappa_{ik} \mp \kappa_{jk+1}) \Lambda_{ik}^R \right\} \Lambda_{jk+1} \int_{-\infty}^{\infty} U_{ik} U_{jk+1} dz \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ (\kappa_{ik+1} \pm \kappa_{jk+1}) \Lambda_{ik+1} - (\kappa_{ik+1} \mp \kappa_{jk+1}) \Lambda_{ik+1}^R \right\} \Lambda_{jk+1} \int_{-\infty}^{\infty} U_{ik+1} U_{jk+1} dz \end{aligned} \quad (3-10)$$

となる。従って、上式の第 $j$ 項より

$$\begin{aligned} & \left\{ (\kappa_{jk} + \kappa_{jk+1}) \Lambda_{jk} - (\kappa_{jk} - \kappa_{jk+1}) \Lambda_{jk}^R \right\} \int_{-\infty}^{\infty} U_{jk} U_{jk+1} dz \\ &= 2\kappa_{jk+1} \Lambda_{jk+1} \int_{-\infty}^{\infty} U_{jk+1} U_{jk+1} dz \end{aligned} \quad (3-11a)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ (\kappa_{jk} - \kappa_{jk+1}) \Lambda_{jk} - (\kappa_{jk} + \kappa_{jk+1}) \Lambda_{jk}^R \right\} \int_{-\infty}^{\infty} U_{jk} U_{jk+1} dz \\ &= -2\kappa_{jk+1} \Lambda_{jk+1}^R \int_{-\infty}^{\infty} U_{jk+1} U_{jk+1} dz \end{aligned} \quad (3-11b)$$

の2式が得られ、これを整理すると

$$\Gamma_{ik}(r_k) \equiv \frac{\Lambda_{ik}^R(r_k)}{\Lambda_{ik}(r_k)} = \frac{\gamma_{ik} + \Gamma_{ik+1}(r_k)}{1 + \gamma_{ik} \Gamma_{ik+1}(r_k)} \quad (3-12)$$

の関係が求まる。但し、上式は $i=j$ として得られるが、 $j$ もまた任意であり添字 $i$ で示した。また、 $\gamma_{ik}$ は

$$\gamma_{ik} \equiv \frac{\kappa_{ik} - \kappa_{ik+1}}{\kappa_{ik} + \kappa_{ik+1}} \quad (3-13)$$

である。 $\Gamma_{ik}(r_k)$ は第 $i$ モードの入射波と反射波との振幅比であり、しかも接続点 $r_k$ 前後の漸化式(3-12)で与えられる。

次に，漸化式(3-12)を式(3-9)に代入し，整理すると，

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2\kappa_{ik}\kappa_{ik+1}(1-\Gamma_{ik+1})}{(\kappa_{ik}+\kappa_{ik+1})+(\kappa_{ik}-\kappa_{ik+1})\Gamma_{ik+1}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}_{ik}\tilde{\psi}_{jk+1}dz \\ = \sum_{i=1}^{\infty} \kappa_{ik+1}(1-\Gamma_{ik+1}) \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}_{ik+1}\tilde{\psi}_{jk+1}dz \end{aligned} \quad (3-14a)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2\kappa_{ik}(1+\Gamma_{ik+1})}{(\kappa_{ik}+\kappa_{ik+1})+(\kappa_{ik}-\kappa_{ik+1})\Gamma_{ik+1}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}_{ik}\tilde{\psi}_{jk+1}dz \\ = \sum_{i=1}^{\infty} (1+\Gamma_{ik+1}) \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}_{ik+1}\tilde{\psi}_{jk+1}dz \end{aligned} \quad (3-14b)$$

となる．さらに，(3-14a)+(3-14b) $\times\kappa_{jk}$ を作ると，

$$\begin{aligned} \left\{(\kappa_{jk}+\kappa_{jk+1})+(\kappa_{jk}-\kappa_{jk+1})\Gamma_{ik+1}\right\} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}_{jk+1}\tilde{\psi}_{jk+1}dz \\ = 2\kappa_{jk} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}_{jk}\tilde{\psi}_{jk+1}dz \\ + \sum_{i(\neq j)}^{\infty} \frac{2\kappa_{ik}\left\{(\kappa_{jk}+\kappa_{ik+1})+(\kappa_{jk}-\kappa_{ik+1})\Gamma_{ik+1}\right\}}{(\kappa_{ik}+\kappa_{ik+1})+(\kappa_{ik}-\kappa_{ik+1})\Gamma_{ik+1}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}_{ik}\tilde{\psi}_{jk+1}dz \\ - \sum_{i(\neq j)}^{\infty} \left\{(\kappa_{jk}+\kappa_{ik+1})+(\kappa_{jk}-\kappa_{ik+1})\Gamma_{ik+1}\right\} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}_{ik+1}\tilde{\psi}_{jk+1}dz \end{aligned} \quad (3-15)$$

が得られる．上式の右辺第3項はモード間の直交性より零であり，さらに式(3-8)を用いると，接続点 $r=r_k$ への入射波(第 $j$ モード)の振幅値 $\Lambda_{jk}(r_k)$ と透過波(第 $i$ モード)の振幅値 $\Lambda_{ik+1}(r_k)$ との関係

$$\Lambda_{ik+1}(r_k) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{ij}(r_k) \Lambda_{jk}(r_k) \quad (3-16)$$

が得られる．但し，上式も添字 $j$ と $i$ とを交換して示した．結合係数 $\lambda_{ij}(r_k)$ は

$$\lambda_{ij}(r_k) = \frac{2\kappa_{jk} \left\{ (\kappa_{ik} + \kappa_{jk+1}) + (\kappa_{ik} - \kappa_{jk+1}) \Gamma_{jk+1}(r_k) \right\}}{(\kappa_{jk} + \kappa_{jk+1}) + (\kappa_{jk} - \kappa_{jk+1}) \Gamma_{jk+1}(r_k)} \cdot \frac{I_{jk, ik+1} / I_{ik+1, ik+1}}{(\kappa_{ik} + \kappa_{ik+1}) + (\kappa_{ik} - \kappa_{ik+1}) \Gamma_{ik+1}(r_k)} \quad (3-17)$$

である。ここに、

$$I_{p,q} = \int_{-\infty}^{\infty} U_p(z, r_k) U_q(z, r_k) dz \quad (3-18)$$

とにおいてある。但し、添字  $p$  および  $q$  はいずれも高度分布関数を規定するモード番号とその伝搬領域からなる。以上、式(3-16)より接続点  $r_k$  からの第  $i$  モードの透過波の振幅値  $A_{ik+1}(r_k)$  はそのモードの入射波と他のモードとから決定され、入射モードが複数個ある場合には接続点を経てモード変換を生ずる。なお、結合係数(3-17)を

$$\Gamma_{jk+1}(r_k) = \Gamma_{ik+1}(r_k) = 0, \quad \kappa_{ik} \approx \kappa_{ik+1} \approx \kappa_{jk}$$

とすると、Choら<sup>(50)</sup>の結合係数に一致する。これは  $r=r_{k+1}$  からの反射波を考慮しない場合に相当する。

接続点  $r=r_k$  前後の屈折率分布にほとんど差異がなければ、第  $i$  モードの高度分布関数間に  $U_{ik}(z, r_k) \cong U_{ik+1}(z, r_k)$  が成立する。結合係数(3-17)は領域  $r \leq r_k$  内を伝送するモードが境界面  $r=r_k$  に入射したときのモード変換係数であり、このときの結合係数を  $\lambda_{ij}^+(r_k)$ 、一方伝送モードが  $r \geq r_k$  から  $r \leq r_k$  に至る場合の結合係数を  $\lambda_{ij}^-(r_k)$  と記号  $\pm$  を付して区別することにとすると、同一モード間の結合係数  $\lambda_{ii}^+(r_k)$  と  $\lambda_{ii}^-(r_k)$  との間には

$$\begin{aligned} \lambda_{ii}^+(r_k) + \lambda_{ii}^-(r_k) &\approx 2 \\ \arg[\lambda_{ii}^+(r_k)] &\approx -\arg[\lambda_{ii}^-(r_k)] \\ |\lambda_{ii}^+(r_k)| &\approx |\lambda_{ii}^-(r_k)| \approx 1 \end{aligned} \quad (3-19)$$

の関係があり、相異なるモード間の結合係数  $\lambda_{ij}^+(r_k)$  と  $\lambda_{ij}^-(r_k)$  との間には

$$\lambda_{ij}^+(r_k) \approx -\lambda_{ij}^-(r_k), \quad (i \neq j) \quad (3-20)$$

が成立する。

また、相異なるモード間で  $I_{ik+1, ik+1} \approx I_{jk+1, jk+1}$ ,  $(i \neq j)$  が成立する場合には、結合係数  $\lambda_{ij}(r_k)$  と  $\lambda_{ji}(r_k)$  との間に

$$\lambda_{ij}(r_k) \approx -\lambda_{ji}(r_k), \quad (i \neq j) \quad (3-21)$$

の関係も得られる【付録2】。

以上、伝搬方向に対して大気がゆるやかに変化している場合の伝搬特性は接続点での反射波と入射波の比(3-12)および透過波の振幅値(3-16)を逐次計算してゆけばよいことになる。但し、 $r_k \leq r \leq r_{k+1}$ での波動関数  $\psi_{k+1}$  は、 $r=r_{k+1}$ からの反射波を考慮に入れて

$$\begin{aligned} \psi_{k+1} &= \sum_{i=1}^{\infty} \psi_{ik+1} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \Lambda_{ik+1}(r) + \Lambda_{ik+1}^R(r) \right\} U_{ik+1}(z, r_k) \end{aligned} \quad (3-22)$$

である。なお、誘電率  $\epsilon_k \approx \epsilon_{k+1}$  の場合、式(3-7)の非導波モードは導波モードに比べて極めて微弱と考えられることから省略してある。

### 3.1.2 垂直偏波

電気型ヘルツ・ベクトルの  $z$  成分を前節と同様  $\psi$  で表すと、式(2-13), (3-5)より電磁界成分  $E_z$  と  $H_\theta$  は

$$E_z \approx k_0^2 \psi, \quad H_\theta \approx -\omega \epsilon \kappa \psi \quad (3-23)$$

で与えられる。

また前節と同様、距離  $r=r_k (>>1)$  で高さ方向の屈折率分布がわずかに異なる大気を考えることにし、この接続点  $r_k$  を各モードが伝搬しているものとする、接続部  $r=r_k$  での電磁界成分  $E_z$ ,  $H_\theta$  の連続性から

$$\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\psi}_{ik} + \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\psi}_{ik}^R + e^{\text{ref}} = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\psi}_{ik+1} + \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\psi}_{ik+1}^R + e^{\text{trans}} \quad (3-24a)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_k \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \kappa_{ik} \tilde{\psi}_{ik} - \sum_{i=1}^{\infty} \kappa_{ik} \tilde{\psi}_{ik}^R + h^{\text{ref}} \right\} \\ = \varepsilon_{k+1} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \kappa_{ik+1} \tilde{\psi}_{ik+1} - \sum_{i=1}^{\infty} \kappa_{ik+1} \tilde{\psi}_{ik+1}^R + h^{\text{trans}} \right\} \end{aligned} \quad (3-24b)$$

が得られる。ただし、ヘルツ・ベクトルの $z$ 成分 $\psi$ は式(3-8)と同じ

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{ik} &= \Lambda_{ik}(r_k) U_{ik}(z, r_k) \\ \tilde{\psi}_{ik}^R &= \Lambda_{ik}^R(r_k) U_{ik}(z, r_k) \\ \tilde{\psi}_{ik+1} &= \Lambda_{ik+1}(r_k) U_{ik+1}(z, r_k) \\ \tilde{\psi}_{ik+1}^R &= \Lambda_{ik+1}^R(r_k) U_{ik+1}(z, r_k) \end{aligned} \quad (3-8)$$

で与えることにする。ここで、式(3-24b)の $\varepsilon_k$ と $\varepsilon_{k+1}$ は接続部の両側、すなわち $r < r_k$ および $r > r_k$ での大気の誘電率であり、 $\varepsilon_k \cong \varepsilon_{k+1}$ と近似できる。従って、垂直磁気ダイポールの代りに垂直電気ダイポールを、また磁気型ヘルツ・ベクトルの代りに電気型ヘルツ・ベクトルを用いることにより結合係数(3-17)は垂直偏波にも適用でき、波動関数 $\psi_{k+1}$ は水平偏波と同様式(3-22)で与えられる。

### 3. 2 不均一ダクトでのヘルツ・ベクトル

無限積分(3-18)を用いて結合係数(3-17)を得ることが問題となる。ここでも前章で示した $2n$ 乗Nプロファイル大気を採用することになると、微分方程式(3-3)に変数変換(2-60)を施して得られる解は式(2-66), (2-69)で与えられ、高度分布関数 $U_0(\eta, s)$ は式(2-88)となる。但し、上層での高度分布関数 $U_0(\eta, s)$ は $1/3$ 次の修正ハンケル関数で与えられ、高い高度 $\eta \gg 1$ で急速に収束しないことから、式(3-18)の積分区間を変更する。図3-2に示すように、距離 $R = R_k$ 、(但し、 $R_k = r_k / L$ )の前後で下層の厚さが $\Delta L$ 、( $|\Delta L| \ll 1$ )だけ異なる屈折率分布 $K(\eta)$ 、 $K(\eta - \Delta L)$ の接地型ダクトが存在するものとする。但し、屈折率 $K(\eta - \Delta L)$ での地



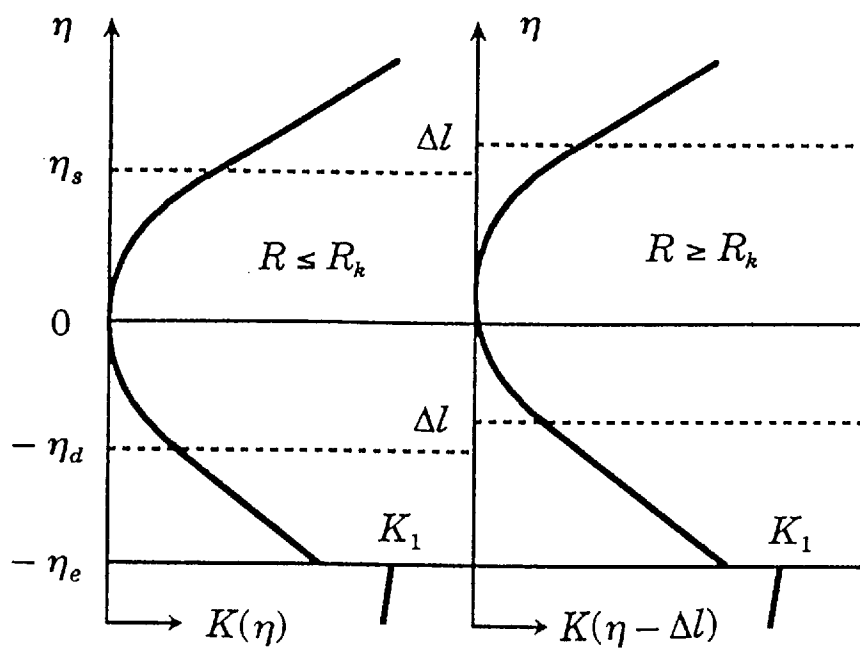


図3-2 不均一大気の階段近似モデル

表面の高度は  $\eta = -\eta_e$  とする.  $R \leq R_k$  および  $R \geq R_k$  のそれぞれの領域内に第  $j$  モードおよび第  $i$  モードが誘起されているものとし, これらの固有値を  $s_j, s_i$ , また高度分布関数を  $U_j, U_i$  とすると, これらは式(2-61)より微分方程式

$$\frac{d^2 U_j}{d\eta^2} + [K(\eta) + s_j] U_j = 0 \quad (3-25a)$$

$$\frac{d^2 U_i}{d\eta^2} + [K(\eta - \Delta l) + s_i] U_i = 0 \quad (3-25b)$$

を満足する. 但し, ここでは固有値  $s_j, s_i$  および  $U_j, U_i$  を区別する各領域の添字  $k, k+1$  は省略してある. また,  $U_j = U_j(\eta), U_i = U_i(\eta)$  である.

ここで,  $(3-25a) \times U_i - (3-25b) \times U_j$  を作り,  $-\infty$  から  $\infty$  まで  $\eta$  で積分し, 2 区間に別けて表示すると,

$$\begin{aligned}
& \int_{\eta^+}^{\infty} \{K(\eta) - K(\eta - \Delta l) + s_j - s_i\} U_j U_i d\eta \\
& = - \int_{-\infty}^{\eta^+} \{K(\eta) - K(\eta - \Delta l) + s_j - s_i\} U_j U_i d\eta \quad (3-26)
\end{aligned}$$

となる。但し、高度  $\eta^+$  には

$$\Delta l > 0, \quad \eta^+ = \eta_s + \Delta l \quad (3-27)$$

$$\Delta l < 0, \quad \eta^+ = \eta_s$$

を採用している。式(2-63a)より  $\eta \geq \eta^+$  では  $K(\eta) - K(\eta - \Delta l) = \Delta l$  であり、これを式(3-26)の左辺に適用すると

$$\int_{\eta^+}^{\infty} U_j U_i d\eta = - \int_{-\infty}^{\eta^+} \frac{K(\eta) - K(\eta - \Delta l) + s_j - s_i}{\Delta l + s_j - s_i} U_j U_i d\eta \quad (3-28)$$

が得られる。従って、距離  $R = R_k$  の隣接大気内に誘起されるモード間の積分は

$$\int_{-\infty}^{\infty} U_j U_i d\eta = - \int_{-\infty}^{\eta^+} \frac{\Delta l - K(\eta) + K(\eta - \Delta l)}{\Delta l + s_j - s_i} U_j U_i d\eta \quad (3-29a)$$

と区間  $\eta^+ \geq \eta \geq -\infty$  の積分で与えられることになる。なお、上式で  $\Delta l = 0$  とすると積分値は零となり、同一大気内の相異なる伝送モード ( $i \neq j$ ) の直交性を満たしている。また、微分方程式(3-25a), (3-25b)を用いると、上の積分は

$$\int_{-\infty}^{\infty} U_j U_i d\eta = \int_{-\infty}^{\eta^+} U_j U_i d\eta + \frac{1}{\Delta l + s_j - s_i} \left[ U_i \frac{dU_j}{d\eta} - U_j \frac{dU_i}{d\eta} \right]_{\eta = \eta^+} \quad (3-29b)$$

と書き換えられる。さらに、上の積分で  $\Delta l = 0$  とし、次に  $j \rightarrow i$  とすることで

$$\int_{-\infty}^{\infty} U_i^2 d\eta = \int_{-\infty}^{\eta^+} U_i^2 d\eta - \left[ \frac{dU_i}{d\eta} \cdot \frac{\partial U_i}{\partial s} \right]_{\eta = \eta^+} + \left[ U_i \cdot \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{dU_i}{d\eta} \right) \right]_{\eta = \eta^+} \quad (3-30)$$

と同一モードに関する積分が得られる。

なお、地表面の伝搬定数  $k_1$  と大気のもとの間に  $|k_1| \gg k_0$  の関係があり、し

かも $k_1$ の虚部は非常に大きく，式(2-67)より $|v(\eta, s)| \gg 1$ であり，解(2-66c)は漸近展開形

$$h_1\{v(\eta, s)\} \approx \frac{\exp\left[j(2/3)\{v(\eta, s)\}^{3/2} - j5\pi/12\right]}{\{v(\eta, s)\}^{1/4}} \quad (3-31)$$

で与えられる<sup>(62)</sup>．従って，地表面 $\eta = -\eta_e$ よりわずかに低い高度で分布関数(2-66c)は急速に減衰する．以上より，式(3-29)，(3-30)の積分区間の下限 $-\infty$ は地表面高度に表皮の深さを加えた値で置き換えることができ，積分(3-29)，(3-30)のいずれも

$$\int_{-\infty}^{\infty} U_j U_i d\eta = \int_{\eta^-}^{\eta^+} U_j U_i d\eta + \frac{1}{\Delta l + s_j - s_i} \left[ U_i \frac{dU_j}{d\eta} - U_j \frac{dU_i}{d\eta} \right]_{\eta=\eta^+} \quad (3-32a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} U_i^2 d\eta = \int_{\eta^-}^{\eta^+} U_i^2 d\eta - \left[ \frac{dU_i}{d\eta} \cdot \frac{\partial U_i}{\partial s} \right]_{\eta=\eta^+} + \left[ U_i \cdot \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{dU_i}{d\eta} \right) \right]_{\eta=\eta^+} \quad (3-32b)$$

と有限積分に変換可能となる．但し，

$$\eta^- = -\eta_e - \frac{1}{|\text{Im}[Hk_1]|} \quad (3-33)$$

とにおいてある．

なお，積分(3-32)の導出に用いた屈折率分布は $K(\eta)$ ， $K(\eta - \Delta l)$ としたが，隣接する屈折率分布としては中層・下層両層の厚さの差が $\Delta l$ であればよく，あるいは $\Delta l = 0$ とし，下層の屈折率傾度 $\alpha^3$ や中層の次数 $n$ が異なる場合でもよい．つまり，中層と下層からなるNプロファイルがわずかに異なるすべての大気に対して積分(3-32)は有効である．

図3-3に示すように，下層大気層の深さが距離とともに変化する大気モデルを採用する．図3-3の領域 $R_k \leq R \leq R_{k+1}$ ，( $k=0, 1, \dots, m$ ，但し， $R_0=0$ ， $R_{m+1}=\infty$ )での屈折率分布は $K(\eta - k\Delta l)$ ，高度 $\eta_e \rightarrow \eta_e + k\Delta l$ とする．但し， $\Delta l$ は隣

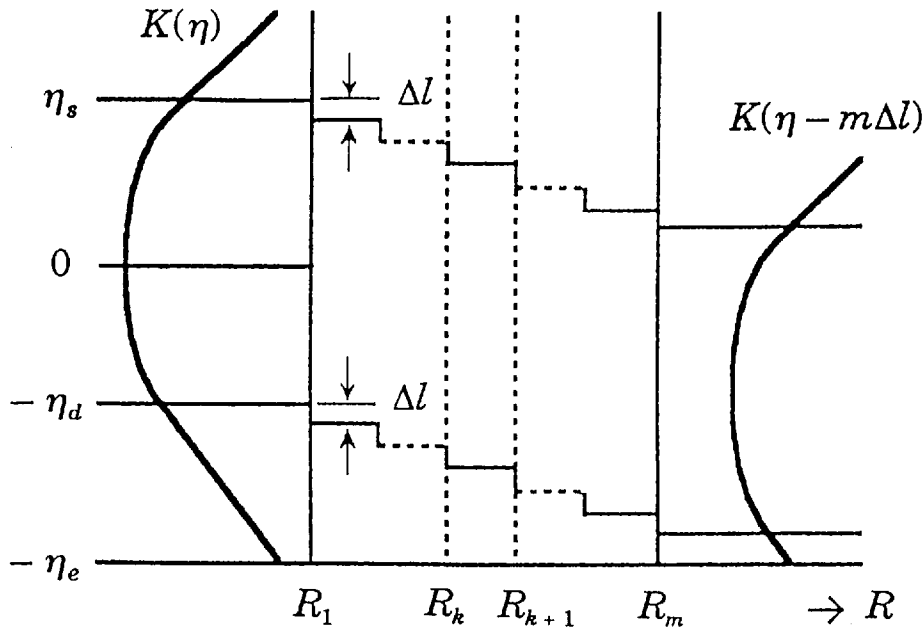


図3-3 不均一ダクト・モデル

接下層大気の高さの差であり、図3-3では $\Delta l < 0$ として描いてある。高さの差 $\Delta l$ が $|\Delta l| \ll 1$ のとき領域 $R_1 \leq R \leq R_m$ は水平方向に不均一とみなすことができ、図3-3は水平方向に均一、不均一、均一の3つの領域で構成される大気モデルと考えることができる。従って、領域 $R_k \leq R \leq R_{k+1}$ でのヘルツ・ベクトル $\psi_{k+1}$ を逐次算出することにより大気モデル全域でのヘルツ・ベクトル $\psi$ を得ることになる。

大気接続面 $R=R_k$ での式(3-18)の積分 $I_{ik+1, ik+1}$ および $I_{jk, ik+1}$ を式(3-32a), (3-32b)より定めることにする。まず、方程式(3-25b)の $U_i$ に対応させる $U_{ik+1}$ は高度分布関数(2-88)の高さをそれぞれ $\eta \rightarrow \eta - k\Delta l$ ,  $\eta_e \rightarrow \eta_e + k\Delta l$ とすることで、式(3-32b)は積分 $I_{ik+1, ik+1}$ となる。また、方程式(3-25a)の $U_j$ に対応させる $U_{jk}$ は高度関数(2-88)を $\eta \rightarrow \eta - (k-1)\Delta l$ ,  $\eta_e \rightarrow \eta_e + (k-1)\Delta l$ とすることにより、式(3-32a)は積分 $I_{jk, ik+1}$ となる。但し、式(2-86)の $\eta^+$ は $\Delta l > 0$ のとき $\eta_s + \Delta l \rightarrow \eta_s + k\Delta l$ , 一方 $\Delta l < 0$ のとき $\eta_s \rightarrow \eta_s + (k-1)\Delta l$ に変更する。高度関数 $U_{ik+1}$ および $U_{jk}$ での固有値 $s_{ik+1}$ ,  $s_{jk}$ はモード方程式(2-86)にそれぞれ

$\eta_e \rightarrow \eta_e + k\Delta L$ ,  $\eta_e \rightarrow \eta_e + (k-1)\Delta L$ を適用して定める。以上より、反射係数  $\Gamma_{j,k+1}(R_k)$ を決定できれば、結合係数(3-17)は求められる。

距離  $r$  が十分大きければ  $|\kappa_i LR| \gg 1$  と考えてよく、式(2-85)に含まれるハンケル関数  $H_0^{(2)}(\kappa_i LR)$  の漸近形は式(2-72)で与えられる。従って、水平方向に均一な大気モデル領域  $R \leq R_1$  での振幅値(3-4)の  $\beta(R)$ ,  $\tau_0(R)$  は式(2-85), (2-72)より

$$\begin{aligned}\beta(R) &= \kappa_i LR - \frac{\pi}{4} \\ \tau_0(R) &= \frac{j\Delta\beta_0 \psi_0(s_i)}{L} \sqrt{\frac{\pi}{R}}\end{aligned}\quad (3-34)$$

である。式(3-12)の  $\Gamma_{ik+1}(R_k)$  は  $R=R_k$  での反射係数であり、距離  $R=R_{k+1}$  での反射係数  $\Gamma_{ik+1}(R_{k+1})$  は式(3-4), (3-34)より

$$\Gamma_{ik+1}(R_{k+1}) = \Gamma_{ik+1}(R_k) \exp\{j2\beta_{ik+1}(R_{k+1})\} \quad (3-35)$$

で与えられる。但し、

$$\beta_{ik+1}(R) = \kappa_{ik+1} L (R - R_k) \quad (3-36)$$

とにおいてある。従って、相異なる大気境界面  $R=R_k$ , ( $k=1, 2, \dots, m$ )での各反射係数  $\Gamma_{ik}(R_k)$  は  $\Gamma_{im+1}(R_{m+1})=0$  とおくことで、式(3-12), (3-35)より順次求めることができる。但し、一般に  $1 \gg |2\gamma_0 H s_{ik}|$  であり、式(2-57), (2-60)より

$$\kappa_{ik} \approx k_0(1 - \gamma_0 H s_{ik}) \quad (3-37)$$

と近似でき、式(3-13)より  $\gamma_{ik} \approx 0$  となることから、反射係数  $|\Gamma_{ik}(R_k)| \ll 1$  である。

領域  $R_k \leq R \leq R_{k+1}$ , ( $k=1, 2, \dots, m$ )でのヘルツ・ベクトル(3-22)は式(3-36), (3-35), (3-34)より

$$\psi_{k+1} = \sum_{i=1}^{\infty} \Lambda_{ik+1}(R) U_{ik+1}(\eta, R_k) \Omega_{ik+1}(R) \quad (3-38)$$

となる。ここに、

$$\Lambda_{ik+1}(R) = \sqrt{\frac{R_k}{R}} \Lambda_{ik+1}(R_k) \exp\{-j\beta_{ik+1}(R)\} \quad (3-39)$$

とにおいてある。但し、振幅値  $\Lambda_{ik+1}(R_k)$  はモード変換(3-16)で決定する。また、

$R=R_{k+1}$ からの反射波の導入で得られる $\Omega_{ik+1}(R)$ は

$$\Omega_{ik+1}(R) = 1 + \Gamma_{ik+1}(R_{k+1}) \exp \left[ -j2 \left\{ \beta_{ik+1}(R_{k+1}) - \beta_{ik+1}(R) \right\} \right] \quad (3-40)$$

である．先に述べたように，高度分布関数 $U_{ik+1}(\eta, R_k)$ はこの領域の大気モデルから定まる式(2-88)を，つまり

$$U_{ik+1}(\eta, R_k) = U_0(\eta - k\Delta L, s_{ik+1}) \quad (3-41)$$

を用いる．但し，ここでも固有値 $s_{ik+1}$ 決定に用いる方程式(2-86)および高度関数(2-88)では $\eta_e \rightarrow \eta_e + k\Delta L$ とする．

また，領域 $R \leq R_1$ でのヘルツ・ベクトル $\psi_1$ は式(2-84), (3-40)を用いて

$$\psi_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \Lambda_0(R, s_i) U_0(\eta, s_i) \Omega_{i1}(R) \quad (3-42)$$

と表すことができる．但し， $k=1$ での式(3-16)の振幅値 $\Lambda_{j1}(R_1)$ は式(2-85)より

$$\Lambda_{j1}(R_1) = \Lambda_0(R_1, s_j) \quad (3-43)$$

である．なお，ヘルツ・ベクトル(3-38), (3-42)は水平・垂直両偏波で成立する．

### 3. 3 数 値 計 算 例

見通しを越えて異常高電界をもたらすダクトはその消滅・発達やその移流によりより複雑な受信特性を与える。このダクト・モデルとして屈折率傾度ゼロ付近の屈折率が高さに対して  $2n$  乗特性をもち、ダクト高が距離とともに増減するような不均一ダクト・モデルを採用する。まず水平方向に均一なダクトでのダクト高と受信電界の極大値を与える高度との関係、特に  $2n$  乗  $N$  プロファイルと bilinear プロファイルとの極大高度変動の相異を示し、次にわずかな差異で隣接するダクト・モデル間の結合係数の計算例を用いて次数  $n$  による結合モードのふりまいの違いについて言及する。最後に、階段近似を用いて得られる不均一ダクト内での受信電界の空間分布を示し、これらの結果について考察する。また、スプリット・ステップ法からの結果とも比較する。

#### 3. 3. 1 $N$ プロファイルによる極大高度変動

図 2-46 ～ 図 2-55 で示したように、第  $i$  モードの極大点は  $i$  個存在するが、ダクト高の増大とともに地表面に近い高度から順次極大点が現われる。しかも、 $2n$  乗  $N$  プロファイル・モデルでは各モードとも地表面から高い位置に現われる極大点ほどダクト高に対して激しく変動する。そこで、この地表面から最も高い位置に現われる極大点の変化の一例を図 3-4 に示した。ここでも極大高度は高度変換  $Z_p = \eta_p + \eta_e$  を用いて地表面からの極大高度  $Z_p$  で描いてある。また、次数  $n \geq 1$  の場合、中層の厚さ  $\eta_s = 3$  とし、 $\eta_D \leq 3$  のダクト高では  $\eta_d = \eta_D$ ,  $l = 0$  であり、一方  $\eta_D \geq 3$  では  $\eta_d = 3$  に固定し、下層の深さ  $l$  の変化となる。従って、 $\eta_D \geq 3$  の場合は中層大気下に修正屈折率傾度  $\alpha^s = -1$  の逆転層がある場合に相当する。比較のため、図 3-4 には次数  $n = 0.5$  とし、 $\eta_s = \eta_d = 0$  の bilinear プロファイルでの

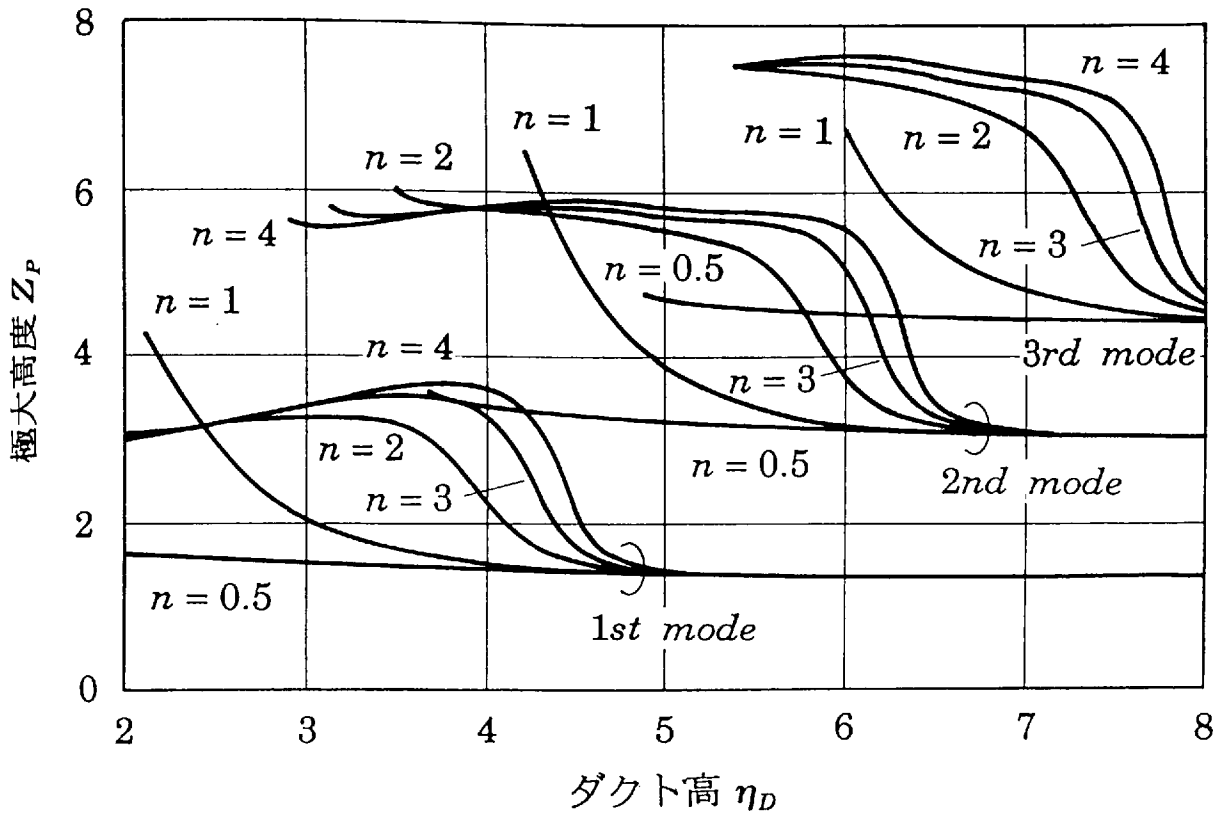


図3-4 ダクト高と極大電界高度との関係

極大高度も示した。このときの下層の深さは  $l = \eta_D$  であり、屈折率傾度は  $\alpha^3 = -1$  とする。なお、偏波は水平としている。図3-4から明らかなように、ダクト高に対する極大高度  $Z_p$  の変化は次数  $n=0.5$ ,  $n=1$  そして  $n>1$  の3つの場合に分類できる。次数  $n=0.5$  ではダクト高の増減による極大高度の変動はほとんどない。次数  $n=1$  の場合にはダクト高の増大とともに  $Z_p$  は単調に減少し、一定値 ( $=Z_{pi}$ ,  $i=1,2,3$ ) に収束する。但し、 $Z_{p1}=1.319$ ,  $Z_{p2}=3.070$ ,  $Z_{p3}=4.539$  である。次数  $n>1$  の場合はいずれのモードもダクト高に対してさほど変動しない極大高度の状態が続き、次に収束高度  $Z_{pi}$  直前でのわずかなダクト高の増減が高度分布に急激な変動を与えるようになる。しかも大きな  $n$  ほどこの変動は大きい。さらにダクト高が増していくと、各モードとも地表面近くに強くトラップされるようになり、極大高度が一定値  $Z_{pi}$  となるダクト高での受信電界は次数  $n$  に関係なく、つまり  $n \geq 0.5$  の全ての次数に対して各モード固有の高度分布を示す。このとき、トラッピング・モードとなる。垂直偏波でも極大高度は前述と同様の特性を示す。



### 3.3.2 逆転大気モデルの結合係数

高さに対して  $2n$  乗  $N$  プロファイルをもつ逆転大気モデルがわずかな差異で隣接している一例として、下層大気の深さ  $l$  が  $\Delta l$  だけ異なる場合の結合係数  $\lambda_{ij}$ , ( $i, j=1, 2, 3$ ) を図 3-5 ～ 図 3-4 4 に示した。但し、図 3-5 ～ 図 3-3 2 は水平偏波での結合係数、一方図 3-3 3 ～ 図 3-4 4 は垂直偏波の場合である。また、図 3-5 ～ 図 3-1 6 での中層の厚さは  $\eta_s = \eta_d = 3$  としており、従って式(2-64)より下層大気の修正屈折率傾度  $\alpha^3$  は  $\alpha^3 = -1$  である。図 3-1 7 ～ 図 3-2 8 および図 3-3 3 ～ 図 3-4 4 はいずれも中層の厚さに  $\eta_s = \eta_d = 2$  を採用しており、前者同様  $\alpha^3 = -1$  である。図 3-2 9 ～ 図 3-3 2 は中層の厚さ  $\eta_s = 2$ 、修正屈折率傾度  $\alpha^3 = -2$  の場合である。なお、 $2n$  乗  $N$  プロファイルの結合係数と bilinear プロファイルのそれとの比較のため、図 3-5 ～ 図 3-1 3 には  $n=0.5$  の場合の結合係数  $\lambda_{ij}^+$  を記載した。また、 $\Delta l > 0$ 、つまり距離  $R$  に対してダクト高  $\eta_D$  が増大していく場合に対して  $\lambda_{ij}^+$ 、 $\Delta l < 0$  に対しては  $\lambda_{ij}^-$  と記号  $\pm$  を付して区別した。また、隣接する下層の深さの差として  $\Delta l = \pm 0.01$  を選んだ。

図 3-5 はダクト高  $\eta_D$  に対する第 1 モードの結合係数  $\lambda_{11}^+$  の大きさ  $|\lambda_{11}^+|$  とその偏角  $\arg[\lambda_{11}^+]$  の関係である。ダクト高  $\eta_D$  の増大とともに  $|\lambda_{11}^+|$  は次第に大きくなり、次数  $n=0.5, 1, 2, 3, 4$  の順に最大値をもち、その後  $|\lambda_{11}^+| \approx 1$  となる。また、結合係数の偏角  $\arg[\lambda_{11}^+]$  は  $|\lambda_{11}^+|$  とほぼ連動して変化するが、ダクト高全域での変化は少なく  $|\lambda_{11}^+| \approx 1$  に呼応して  $\arg[\lambda_{11}^+] \approx 0$  となる。これらのことからわずかに異なる大気内に入射した第 1 モードがほぼ同相のまま透過波として伝搬していくことになる。図 3-5 の第 1 モードと同様、図 3-6 の第 2 モード、図 3-7 の第 3 モードも順次深いダクト高で  $|\lambda_{22}^+| \approx |\lambda_{33}^+| \approx 1$  となるが、これらは図 3-4 のダクト高増大に対する極大高度  $Z_{pi}$  への漸近とも一致している。隣接大気内に誘起される同一モードの類似性は強く、互のモードは直交性に近い関係を示す。これを準直交性と呼ぶことにすると、図 3-5 の  $|\lambda_{11}^+|$  の最大値は次数

$n=0.5, 1, 2, 3, 4$ の順に大きくなり、これは準直交性の程度を表す。つまり、図3-4より $n=0.5$ の極大高度はダクト高にほとんど依存せず、隣接する第1モードは互いに直交性に近いふるまいを示す。次数 $n$ が増すと次第に同一モード間の準直交性が低下し、 $|\lambda_{11}^+|$ の変動が増大する。図3-6の第2モード、図3-7の第3モードも同一傾向を示す。但し、極大高度 $Z_{p_i}$ となるダクト高では次数 $n$ に関係なく隣接する同一モード間の準直交性は強まる。

ここで図3-5と図3-6とを対比すると、 $|\lambda_{11}^+|$ の最大値と $|\lambda_{22}^+|$ の最小値を与えるダクト高はいずれの $n$ に対してもわずかに異なる。しかし、結合係数(3-17)の分子に含まれる積分の絶対値 $|I_{1k, 1k+1}|$ 、 $|I_{2k, 2k+1}|$ は同一ダクト高で極値をもつ。このことから $|\lambda_{11}^+|$ の最大値と $|\lambda_{22}^+|$ の最小値とが対応することになる。同様にして $|\lambda_{22}^+|$ の最大値が $|\lambda_{33}^+|$ の最小値に対応する。なお、最大値 $|\lambda_{11}^+|$ を与えるダクト高は $n=0.5, 1, 2, 3, 4$ の順にそれぞれ $\eta_D=3.34, 3.74, 4.16, 4.40, 4.53$ 、また最大値 $|\lambda_{22}^+|$ のダクト高は $\eta_D=5.11, 5.57, 5.95, 6.18, 6.31$ である。以上より、第 $i$ モードと第 $i+1$ モードとの間にエネルギーの授受が生じていることになる。しかも、第 $i$ モードの $|\lambda_{ii}^+|$ の最大値を与えるダクト高は図3-4より極大高度の収束値 $Z_{p_i}$ 直前のそれに一致していることがわかる。つまり、第 $i$ モードがトラッピング・モードとなる直前に第 $i+1$ モードの一部がモード変換され、第 $i$ モードに加算される。従って、最大値 $|\lambda_{ii}^+|$ を与えるダクト高が次数 $n$ によって異なることは図3-4より明らかであり、 $n=0.5, 1, 2, 3, 4$ の順により低いダクト高で $|\lambda_{ii}^+|$ は最大となる。

図3-8はそれぞれ結合係数の大きさ $|\lambda_{12}^+|$ とその偏角 $\arg[\lambda_{12}^+]$ のダクト高変化である。結合係数 $|\lambda_{12}^+|$ の最大値を与えるダクト高と図3-6の $|\lambda_{22}^+|$ の最小値のそれは一致し、また最大値 $|\lambda_{12}^+|$ を与えるダクト高での偏角は図3-8より $\arg[\lambda_{12}^+] \cong 0$ であり、このときの結合係数は第2モードから第1モードへの変換係数となる。しかし、 $n>1$ の場合の $\arg[\lambda_{12}^+]$ はダクト高 $3<\eta_D<4$ の範囲で激しい変動を示す。これは図3-4の第1モードの極大高度が急変するダクト高に一致

し、ダクト高  $\eta_D \approx 3$  での結合係数  $\lambda_{12}^+$  は第1モードから第2モードへのモード変換係数となり、結合モードの関係が逆転する。また、 $n=0.5$  の場合もダクト高の減少とともに結合係数は  $n>1$  と同様のふるまいを示すが、 $n=1$  の場合ダクト高  $\eta_D \approx 3$  では  $\arg[\lambda_{12}^+] \approx \pi/2$  となり、結合係数は第1モードの位相にわずかな影響を与えるだけとなる。次数  $n$  による  $\lambda_{12}^+$  のふるまいの違いは屈折率傾度  $\alpha^3 \approx 0$  付近の大気層の厚みの差に起因する。つまり、 $n>1$  ではダクト高の増大に対して、最初屈折率傾度  $\alpha^3 \approx 0$  の厚みが伝送モードに影響を与え、次第に  $\alpha^3 < 0$  の逆転大気層が伝送モードに寄与することになる。次数  $n$  による準直交性の差もこれに従う。

図3-10は第1モードと第3モードとの結合係数  $\lambda_{13}^+$  であり、 $\lambda_{12}^+$  と同様第1モードがトラッピング・モードとなる直前のダクト高で  $\lambda_{13}^+$  は第3モードから第1モードへの変換係数のふるまいを示す。しかし、このダクト高では第1モードの電界レベルに比べ第3モードのそれは非常に低く、結合係数  $\lambda_{13}^+$  の第1モードへの寄与は極めて少ない。なお、ここでも次数  $n=1$  と他の次数との間で結合係数  $\lambda_{ij}^+$  ( $i \neq j$ ) の相異が顕著であり、中層大気のプロファイルが高さに対して2乗特性をもつ場合、モード変換があまり起こらないことがわかる。また、 $n=0.5$  での結合係数のふるまいは  $\lambda_{12}^+$  と同様である。

図3-12は第2、第3モード間の結合係数とダクト高との関係を示したものであり、結合係数  $|\lambda_{23}^+|$  が最大値をもつダクト高で第3モードの一部が第2モードへ変換される。但し、 $\arg[\lambda_{23}^+]$  のふるまいから明らかなように、 $n>1$  での結合係数  $\lambda_{23}^+$  の偏角は  $\lambda_{12}^+$  のそれよりダクト高に対してより複雑な変化を示している。これはトラップ状態にある第  $i$  モードの電界強度の極大点が  $i$  個存在するためであり、高次モードほど  $\arg[\lambda_{ij}^+]$  の変化は複雑となる。特に、奇数、偶数モード間の  $\arg[\lambda_{ij}^+]$  の変動が激しい。

相異なる他のモード間の結合係数  $\lambda_{ij}^+$  ( $i < j$ ) のふるまいも前述と同様の傾向を示す。つまり、第  $i$  モードがトラッピング・モードとなる直前のダクト高で  $|\lambda_{ij}^+|$  は最大となり、結合係数  $\lambda_{ij}^+$  は第  $j$  モードから第  $i$  モードへの変換係数となる。

距離とともにダクト高が低下していく $\Delta l < 0$ の場合の結合係数 $\lambda_{ii}$ を図3-14～図3-16に示した。これらは同一モード間の結合係数であり、 $\lambda_{ii}^+$ との間に式(3-19)の関係が成立している。つまり、第 $i$ モードがトラップ状態にあるダクト高からしだいに低下していくと、第 $i$ モードの一部が第 $i+1$ モード以上の高次モードへ変換され、 $|\lambda_{ii}|$ が最小値を示すようになる。これは $\lambda_{ii}^+$ と逆のふるまいである。なお、相異なるモード間の結合係数 $\lambda_{ij}$ は $\lambda_{ij}^+$ との間に式(3-20)の関係をすべて満たしており、図示を省略した。また、図3-8と図3-9、図3-10と図3-11、図3-12と図3-13から明らかなように、 $|\lambda_{ij}|$ と $|\lambda_{ji}|$ との最大値がわずかに異なることを除けば、 $\lambda_{ij}$ と $\lambda_{ji}$ との関係もほぼ式(3-21)を満足している。

これまでに示してきた結合係数は中層の厚さに $\eta_s = \eta_d = 3$ を採用した場合であり、中層の厚さをより薄くしていくと、ダクト高に対する結合係数の変動幅は減少し、次数 $n$ による差異も縮まる。これらの関係を図3-17～図3-28に示した。

また、これまでに採用した下層大気屈折率傾度は $\alpha^s = -1$ であり、この逆転勾配が増すとともに $|\lambda_{ii}^+|$ を最大にするダクト高の $n$ による差は減少し、最大値 $|\lambda_{ii}^+|$ 近傍での変化が急峻となる。これは $n$ によって生ずる中層の屈折率分布の違いより下層の屈折率傾度がより結合係数に寄与することに起因する。一例として、中層の厚さ $\eta_s = 2$ 、修正屈折率傾度 $\alpha^s = -2$ の場合を図3-29～図3-32に示した。

隣接下層大気の深さの差 $\Delta l$ を増すと、モード間の準直交性が低下し、結合係数 $\lambda_{ij}$ の変動は増大する。但し、 $\lambda_{ij}$ は高度分布関数に依存しており、図3-4からわかるように高度分布関数が急激に変動するダクト高付近では極端に大きな $\Delta l$ はとれない。

また先に述べたように、第 $i$ モードは $i$ 個の極大高度をもち、ダクト高の減少とともにまず図3-4に示した極大点が消滅し、順次地表面から高い位置の極大点

が消え，すべての極大点の消滅により地表近くの高度分布関数は高度利得となる．従って，第 $i$ モードの極大点発生・消滅前後のダクト高も結合係数の準直交性を低下させることになり，低いダクト高でも結合係数の変動は起こる．但し，この変動はダクト高による極大高度のそれに比例する．

図3-33～図3-44で示したように垂直偏波での結合係数も水平の場合とほぼ同一特性を示すが，垂直偏波の場合結合係数の変動は水平のそれより低いダクト高で現われる．つまり，垂直・水平それぞれのモードの結合係数はダクト高に対して交互に極値をとることになる．これはトラッピング・モードを誘起させる垂直・水平両偏波のダクト高の差異に一致する．

### 3.3.3 不均一ダクト内での空間分布

$2n$ 乗 $N$ プロファイルの次数 $n$ とダクト高変化による不均一ダクト内での受信電界強度の相異を図3-45～図3-68の空間分布で示した．但し，電界強度は自由空間値に対する相対値 $|r\psi|$ を第1モードから第3モードまでの合成電界で与えた．図中，水平・垂直両偏波に対する空間分布はそれぞれ図3-45～図3-60および図3-61～図3-68である．また，図3-45～図3-48，図3-53～図3-56，図3-61～図3-64は下層の深さ $l$ を距離とともに減少させた場合であり，いずれも $2n$ 乗 $N$ プロファイルの次数 $n=1, 2, 3, 4$ の場合に対応する．一方，図3-49～図3-52，図3-57～図3-60，図3-65～図3-68は下層の深さを増加させた場合であり，これもそれぞれ $n=1, 2, 3, 4$ に対応する．

中層の厚さで区別すると，図3-45～図3-52では中層の厚さは $\eta_s = \eta_d = 3$ ，送信高は地表面からの高度 $Z_t = 3$ に配置してある．また，距離区間 $10 \leq R \leq 12$ の下層の深さは $l = 3$ の成層ダクト領域であり，不均一区間 $12 \leq R \leq 18$ での深さの増減は $l = 1.2$ としている．従って，距離とともに下層の深さが減少する場合距離 $R = 18$ では $l = 1.8$ ，一方増加の場合は $l = 4.2$ となる．区間 $18 \leq R \leq 20$ は $R = 18$ で

の下層の深さで再び成層ダクトとなる．なお，水平方向に不均一な区間の電界強度は120分割の階段近似で得ており，分割一区間 $\Delta R = R_{k+1} - R_k = 0.05$ の等間隔に選んだ．

図3-5 3～図3-6 8の中層の厚さは $\eta_s = \eta_d = 2$ であり，このうち水平・垂直それぞれの偏波の空間分布図3-5 3～図3-6 0および図3-6 1～図3-6 8は成層ダクト区間 $10 \leq R \leq 12$ でそれぞれ下層の深さ $l=3$ ，送信高 $Z_t=3$ および $l=2$ ， $Z_t=2$ としている．不均一区間 $12 \leq R \leq 18$ での深さの増減は $l=1.2$ ，区間 $18 \leq R \leq 20$ は $R=18$ での下層の深さで再び均一成層ダクトとしており，これらは図3-4 5～図3-5 2の場合と同一にした．

前章と同様，高さ $\eta$ ならびに距離 $R$ は正規化した値であり，実際の場合との比較のため再度示すことにすると，例えば周波数 $f=3\text{GHz}$ の場合，正規化高度 $\eta=1$ は実際の高度 $z=10.2\text{m}$ に相当する．また，正規化距離 $R=1$ は実際の距離 $r=13.2\text{km}$ に相当する．従って，不均一区間として定めた $12 \leq R \leq 18$ は $158.4\text{km} \leq R \leq 237.6\text{km}$ であり，一例として逆転大気の大ダクト高 $\eta_D=6$ は $z_e=61.2\text{m}$ ，このときの不均一区間 $79.2\text{km}$ でのダクト高変化は $12.24\text{m}$ の増減となる．地表面と大気の伝搬定数の比 $k_1/k_0$ としてはChoら<sup>(50)</sup>にあわせて $k_1/k_0=10 \exp(-j\pi/4)$ を採用した．

なお，図中の実線は電界強度の等レベル線であり，5dB間隔に描いてある．但し，図3-4 5～図3-4 8の破線は結合係数の伝搬への寄与を明らかにするため， $\lambda_{ii}=1$ ， $\lambda_{ij}=0$ ，( $i \neq j$ )として描いた等レベル線である．

また，第2章の成層ダクト大気での空間分布との比較を容易にするためにそれぞれの対応を示すと，不均一ダクトの空間分布図3-4 5～図3-4 8および図3-4 9～図3-5 2は次数 $n=1, 2, 3, 4$ の順に成層ダクトの空間分布図2-6 2～図2-6 5に対応する．同様に，図3-5 3～図3-5 6および図3-5 7～図3-6 0は図2-7 0～図2-7 3に，また図3-6 1～図3-6 4および図3-6 5～図3-6 8は図2-7 4～図2-7 7に対応する．

図3-45は2乗Nプロファイルのダクト高を距離とともに減少させた場合の空間分布であり、結合係数を考慮しない、つまり隣接大気間の各モードの準直交性が成立する場合( $\lambda_{ii}=1, \lambda_{ij}=0$ )でのそれと異なることがわかる。破線の場合、ダクト高の減少とともに地表面近くにトラップされている第2モードがしだいに弱まり、高高度の等レベル線は上昇する。しかし、図3-15より $|\lambda_{22}|$ はダクト高 $\eta_D=5.58$ 、(下層の深さ $l=2.58$ )で最小値をとることより、高高度での高度分布に影響を与え、第3モードとの間でモード干渉を生じるようになる。その後、ダクト高の減少により第2モードのトラップ状態は弱まり高高度での等レベル線は上昇に転ずるが、結合係数を考慮しない場合に比べて第1、第2モード間の干渉が激しく、地表近くの高レベル領域は狭まる。

また、全域成層ダクトである場合の図2-62と比べると、モード干渉によって生じる距離方向の変動周期が不均一ダクト区間でわずかに長くなる。これはモードを誘起させる固有値がダクト高に依存することによる。また成層ダクトの場合、高高度での高度分布はあまり距離に依存せず、図3-45との相異となる。

図3-45の次数 $n=1$ に対して図3-46は次数 $n=2$ の4乗Nプロファイルからなる不均一ダクトでの空間分布であり、次数 $n$ による伝搬特性の相異は顕著である。これは中層の屈折率分布と不均一区間での結合係数 $\lambda_{11}$ 、 $\lambda_{22}$ によって生じた空間分布の相異である。また、実線と破線との差も図3-45の場合と同一傾向であり、結合係数 $\lambda_{22}$ が第2モードの高度分布を低高度に押し下げる効果をはたす。但し、第3モードの影響はこの空間分布内には現われない。

図3-47、図3-48と次数 $n$ を増やしていくと、ダクト高の減少とともに第2モードの影響が弱まり、地表面近くの電界分布は第1モードが支配的となる。図2-56から明らかなように、次数 $n=3, 4$ の場合はダクト高 $\eta_D=6$ における受信電界レベルのほとんどが第1モードからなることによる。つまり、 $\eta_D=6$ 前後のダクト高は修正屈折率傾度 $\alpha^3 \approx 0$ 付近のプロファイル、すなわち次数 $n$ の大小が第2モードの受信電界レベルに極めて大きな影響を与える。なお、結合係数 $\lambda_{ij}$ の空間

分布への寄与は図 3-4 5, 図 3-4 6 でのそれと同じである.

図 3-4 5 に対し図 3-4 9 は不均一区間でのダクト高増大の場合であり, 両者間の高高度における高度分布の違いがわかる. 距離に対するダクト高の増大によって第 2 モードが高高度で急激な減衰特性を示すようになり, 第 3 モードとの干渉も大きくなる. また, 距離方向の変動周期は図 3-4 5 に比べて短くなる.

図 3-5 0 は次数  $n=2$  のときのダクト高増大での空間分布である. 結合係数  $|\lambda_{22}^+|$ ,  $|\lambda_{33}^+|$  はそれぞれ  $\eta_D=5.95, 7.40$  で最大となり, 特に第 2 モードはダクト高の増大によってトラッピング・モードとなることから, 図 3-4 6 とは極めて異なる伝搬特性となる. つまり,  $R \geq 18$  の領域では第 1, 第 2 モードの干渉とともに第 2, 第 3 モードのモード干渉による電界変動も加わり, ダクト内の空間分布はより複雑な変動特性を示すことになる. これらの特性は次数  $n=3, 4$  の空間分布図 3-5 1, 図 3-5 2 でも現われている.

なお, 図 3-4 9 ~ 図 3-5 2 はいずれも高高度で第 2, 第 3 モードの干渉による電界変動が起り, 複雑な空間分布となることから,  $\lambda_{ii}=1, \lambda_{ij}=0$  でのそれを省略した. 以降の空間分布も同様とした. また, 図 3-4 5 ~ 図 3-6 8 では受信電界強度を第 1 モードから第 3 モードまでの合成電界で与えたが, 図中の高度  $8 \leq Z \leq 0$  では第 4 モード以上の高次モードは低次モードに比べて無視することができ, 第 3 モードまでの近似とした. しかし,  $8 \leq Z \leq 12$  の空間分布を得るには第 1 モードから第 5 モードまでが伝搬に寄与し, 結合係数  $\lambda_{ij}$ , ( $i=j=1 \sim 5$ ) は 25 組の積分値を必要とする. さらに高い高度の電界強度を知るためには, 多数の高次モードの影響を調べる必要が生じ, この場合より効率的な手法, 例えばハイブリット理論<sup>(38),(39)</sup>の導入も考えられる.

図 3-4 5 ~ 図 3-5 2 が区間  $10 \leq R \leq 12$  でダクト高  $\eta_D=6$  の空間分布であるのに対し, 図 3-5 3 ~ 図 3-6 0 はダクト高  $\eta_D=5$  と浅くした場合の空間分布である. 前者のダクト高に対して後者は正規化値でダクト高差 1 と浅いが, 両者の空間分布に大きな差異はない. これは図 3-4 5 ~ 図 3-5 2 も図 3-5 3 ~



図3-6 0 も共に下層の深さ $l=3$ であり、逆転層全体の厚みに極端な差がないことによる。

図3-6 1～図3-6 8は垂直偏波の空間分布である。距離とともにダクト高減少の空間分布図3-6 1～図3-6 4ではダクト高 $\eta_D=4\sim 2.2$ の変化であり、図3-4 2からわかるように結合係数の伝搬への寄与は第1モードのそれだけであり、第2モードとの干渉は次数 $n=1, 2, 3, 4$ の順に弱まる伝搬特性を示す。図3-6 5～図3-6 8のダクト高増大の空間分布では $\eta_D=4\sim 5.2$ のダクト高変化であり、図3-3 3, 図3-3 4から知られるように第1モードと第2モードが伝搬に寄与することになる。このことから距離の増大とともに第1, 第2モードの干渉が強まる。従って、水平偏波でのダクト高に比べて垂直偏波ではより薄いダクト高で水平・垂直両偏波同等の伝搬特性となる。

以上、隣接下層大気の厚さの差を $\Delta l=\pm 0.01$ としたときの結合係数を用いて空間分布を示したが、 $\Delta l$ を変えて得た結合係数からの空間分布ともほぼ一致することの確認を得ている。なお、 $\Delta l=|0.01|$ の場合、隣接大気間の固有値は $s_{ik}\cong s_{ik+1}$ であり、反射係数(3-12)は $\Gamma_{ik}(R_k)\cong O(10^{-7})$ 、従って式(3-40)は $\Omega_{ik+1}(R)\cong 1$ となり、伝搬特性への反射波の影響は極めて少ない。

2.9で述べたように、屈折率傾度ゼロ付近の屈折率分布を規定する次数 $n$ 以外のパラメータが同一の場合、 $2n$ 乗 $N$ プロファイルの修正屈折率差、つまり $N$ プロファイル差は数 $NU$ であり、これは次数 $n$ に依存する。これまでに例示した空間分布は次数 $n$ を固定した場合であり、距離方向に対してダクト高の増減とともにこの次数 $n$ が連続的に変化する場合にはより複雑な高変動の空間分布となることが予想される。

結合モード解析で与えた空間分布に対し、スプリット・ステップ法を用いての空間分布も得ており【付録3】、ここで両者の比較を行なう。距離として $R=10$ を選び、第1モードから第6モードまでの合成電界の高度分布を初期値とし、設

定プロファイル大気に対してスプリット・ステップ法を用い、しかも地表面での境界条件を満足させながら距離 $R=20$ までの受信特性を得た。その結果、図3-45～図3-68の空間分布のうちモード干渉によって極端に減衰する低電界領域でわずかな差異は現われるが、他のすべての領域で両者の受信電界はほぼ一致した。従って、 $Z \leq 8$ の高度では結合モード解析に採用したモード数が有効であることも明らかになった。スプリット間隔は結合モード法で用いた間隔 $\Delta R$ の $1/20 \sim 1/50$ を選んだ。但し、スプリット間隔としては $2n$ 乗 $N$ プロファイルの次数 $n$ の増大とともにより細かくとる必要がある。これは高度分布の次数 $n$ による変動特性の違いによる。また、スプリット・ステップ法では打ち切りによる高高度からの反射を排除する必要がある、 $Z \geq 8$ の高高度で緩やかに減衰するような吸収大気層を設け、また打ち切り関数としてハミング関数等のフィルタリングをほどこした。つまり、図3-45～図3-68の最高高度 $Z=8$ に対し吸収層を2倍～4倍に拡張して数値シミュレーションを試みた。その結果、上層でより緩やかな減衰特性を示す大気層を加えるほど打ち切りからの反射は回避でき、一方結合モード法に比べて数倍の数値計算時間を必要とした。

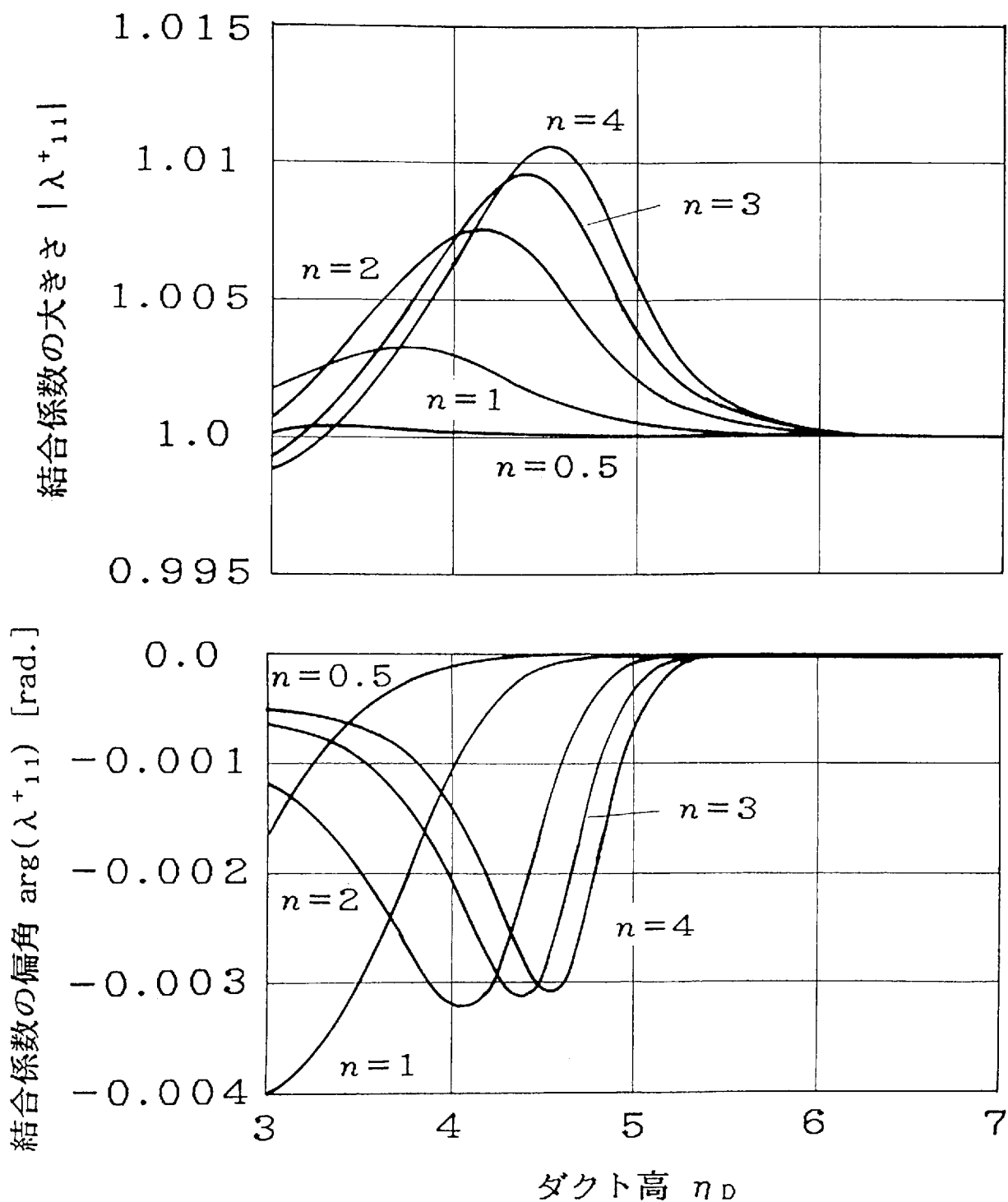


図3-5 ダクト高に対する結合係数 $\lambda_{11}^+$ の変動特性  
ただし,  $n_s = 3$ ,  $\alpha^3 = -1$  (水平偏波)

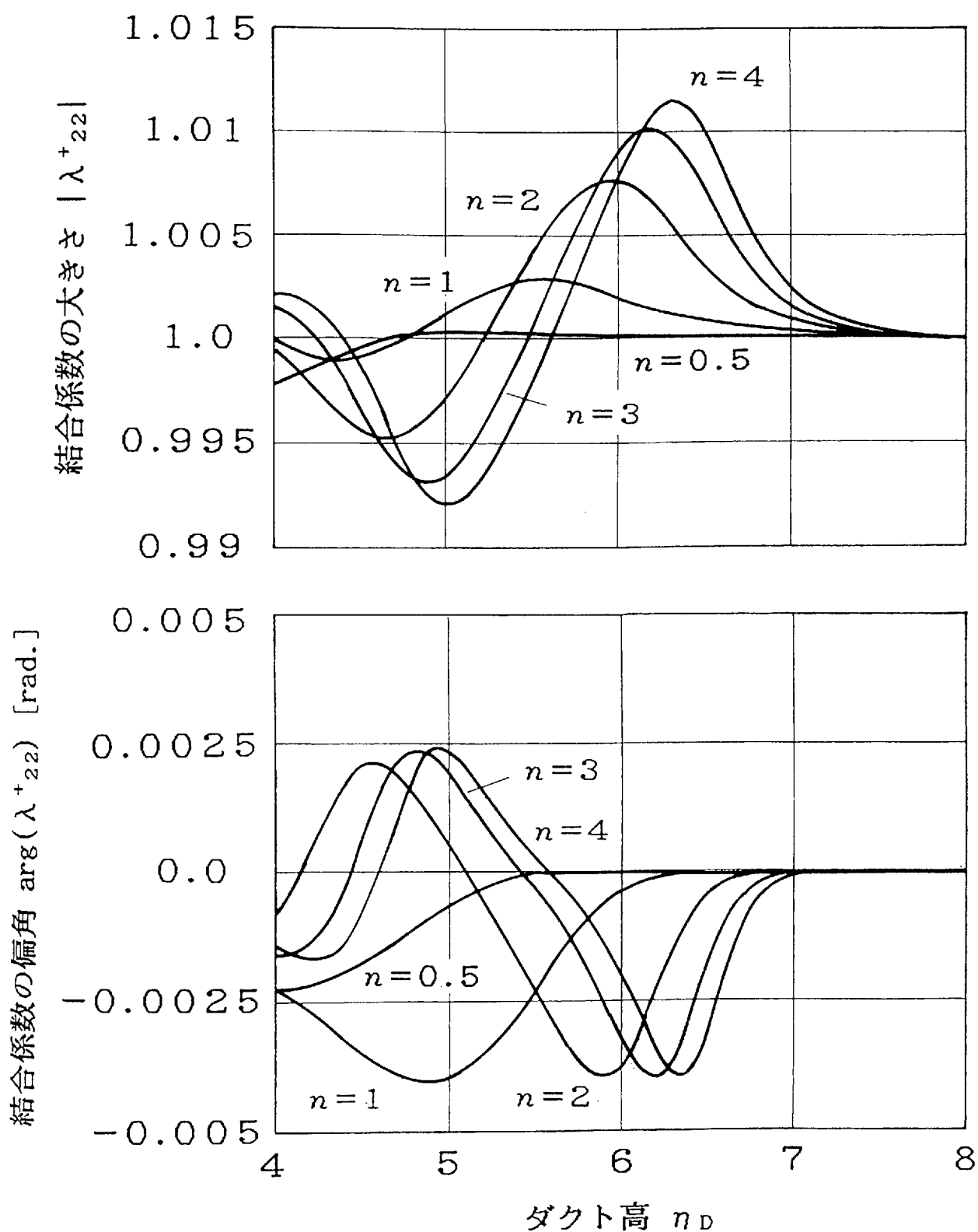


図3-6 ダクト高に対する結合係数 $\lambda^+_{22}$ の変動特性  
ただし,  $n_s = 3$ ,  $\alpha^3 = -1$  (水平偏波)

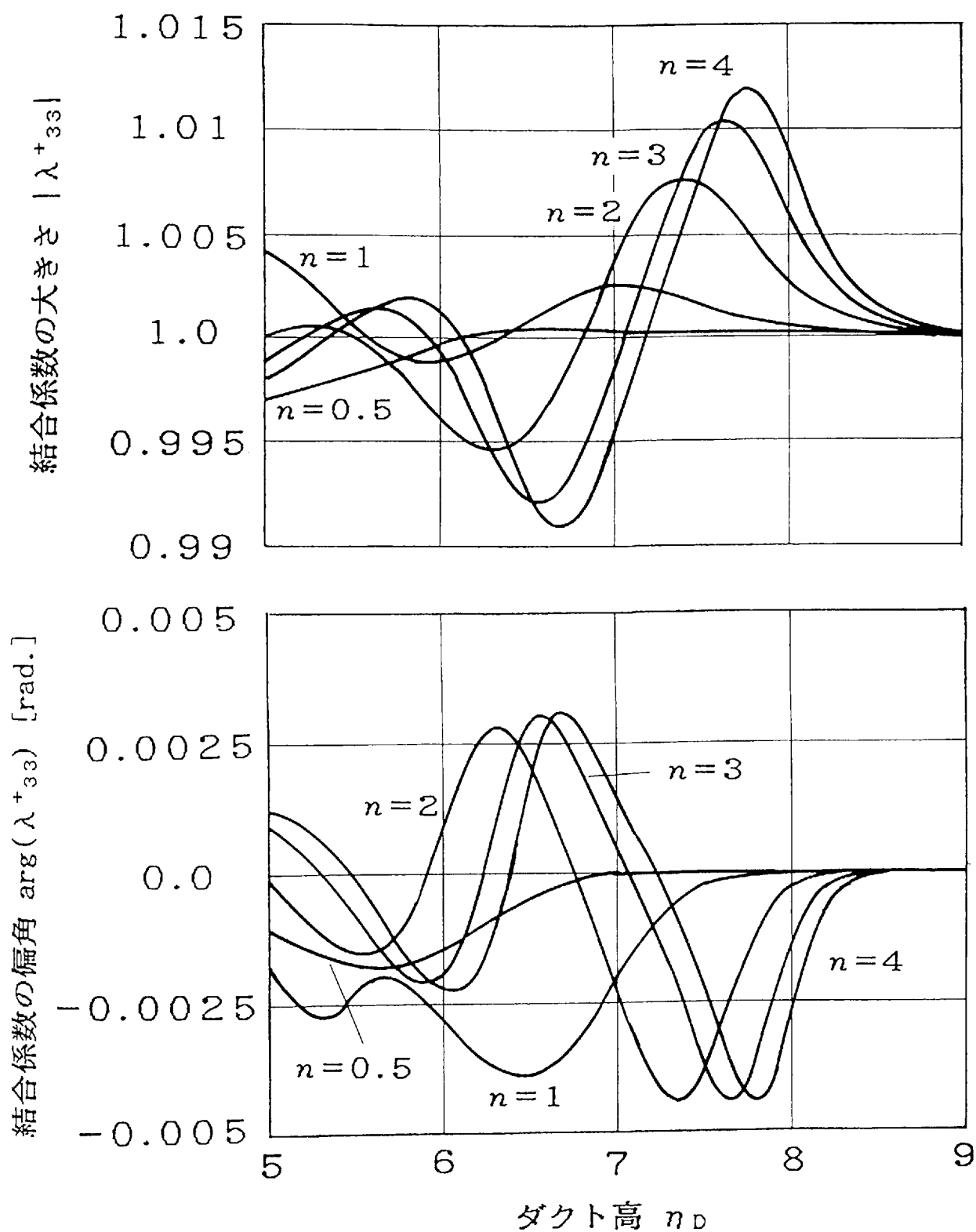


図3-7 ダクト高に対する結合係数 $\lambda^+_{33}$ の変動特性  
ただし、 $n_s=3$ 、 $\alpha^3=-1$ （水平偏波）

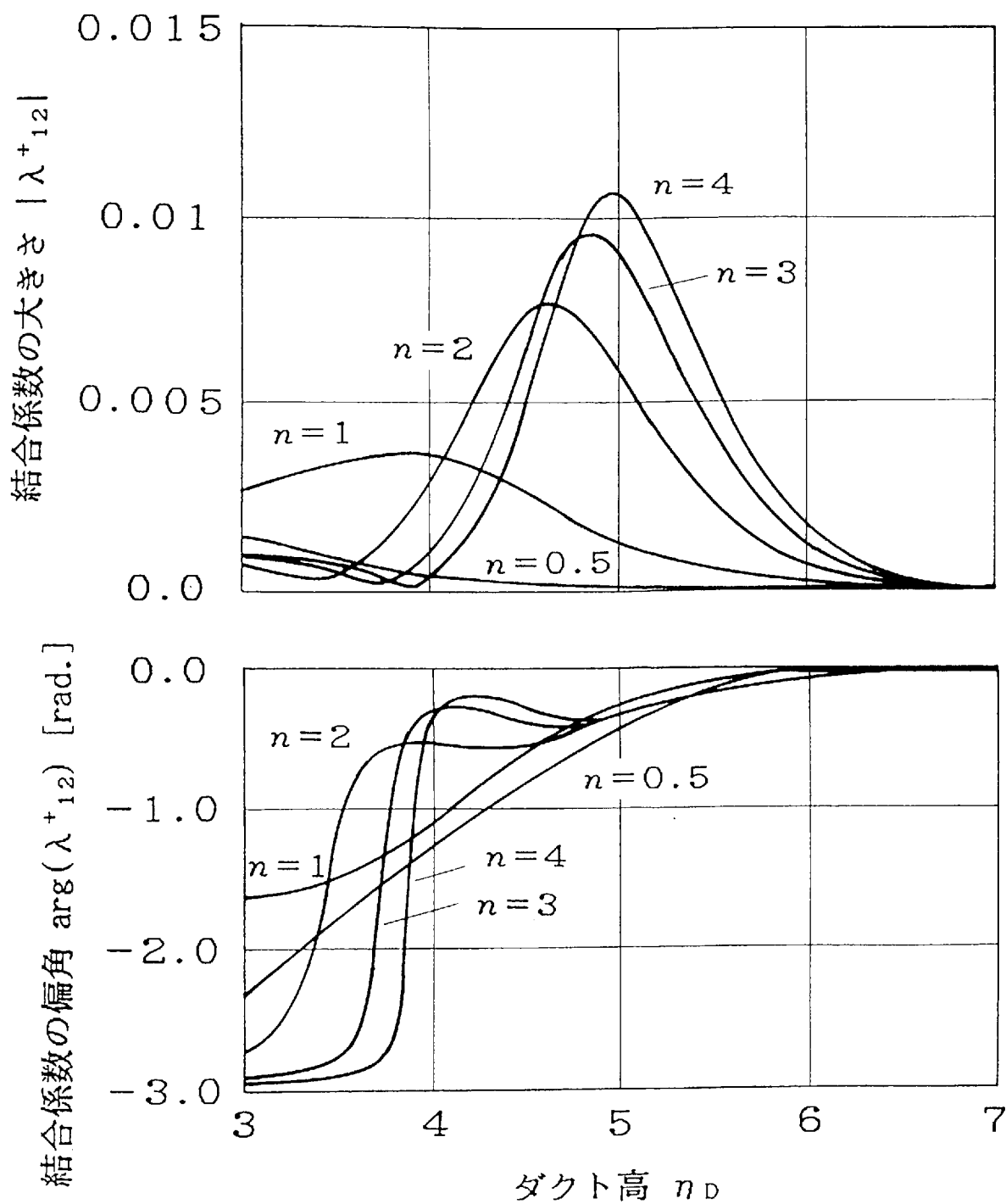


図3-8 ダクト高に対する結合係数 $\lambda^+_{12}$ の変動特性  
ただし,  $n_s = 3$ ,  $\alpha^3 = -1$  (水平偏波)

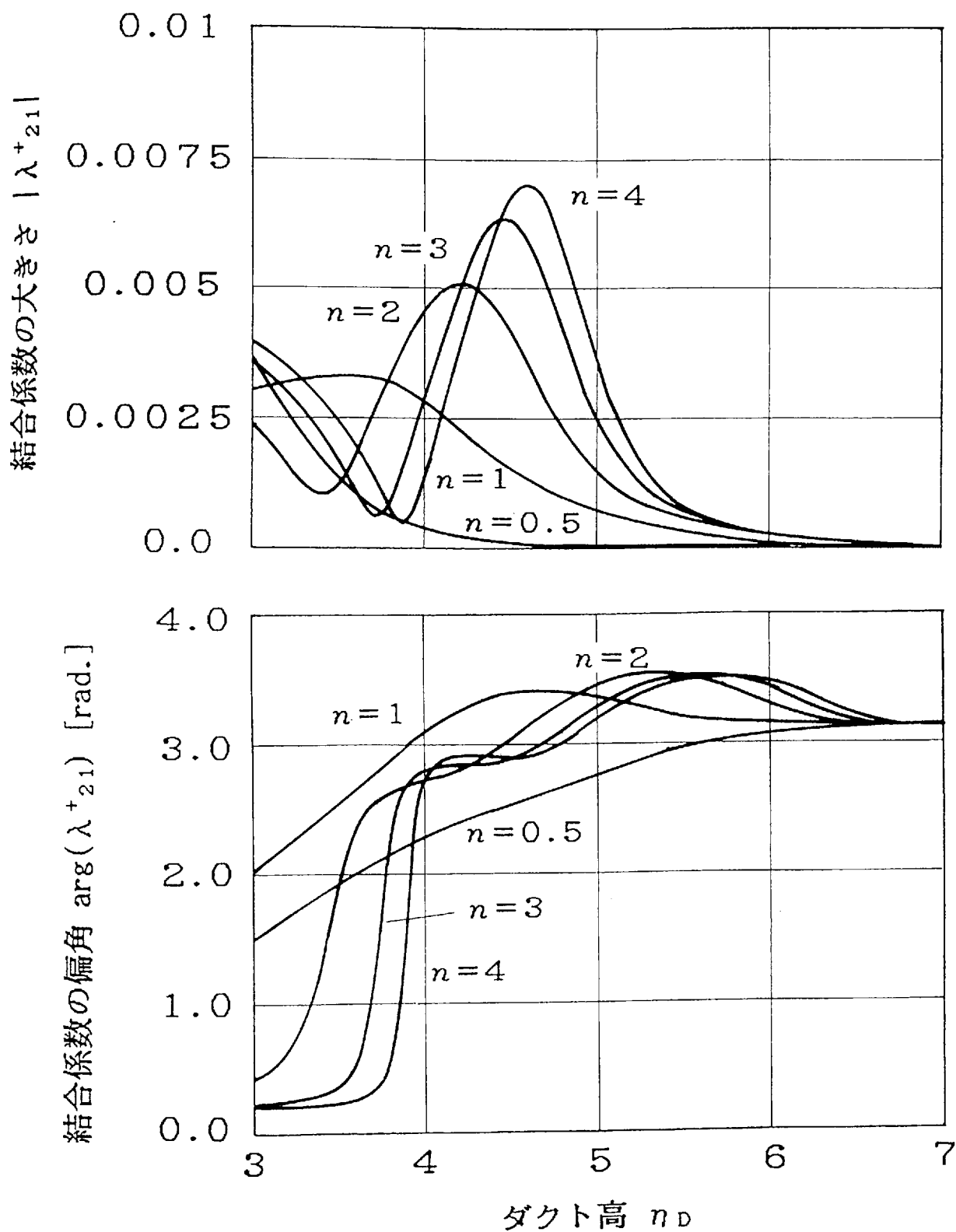


図3-9 ダクト高に対する結合係数 $\lambda^+_{21}$ の変動特性  
ただし,  $n_s=3$ ,  $\alpha^3=-1$  (水平偏波)

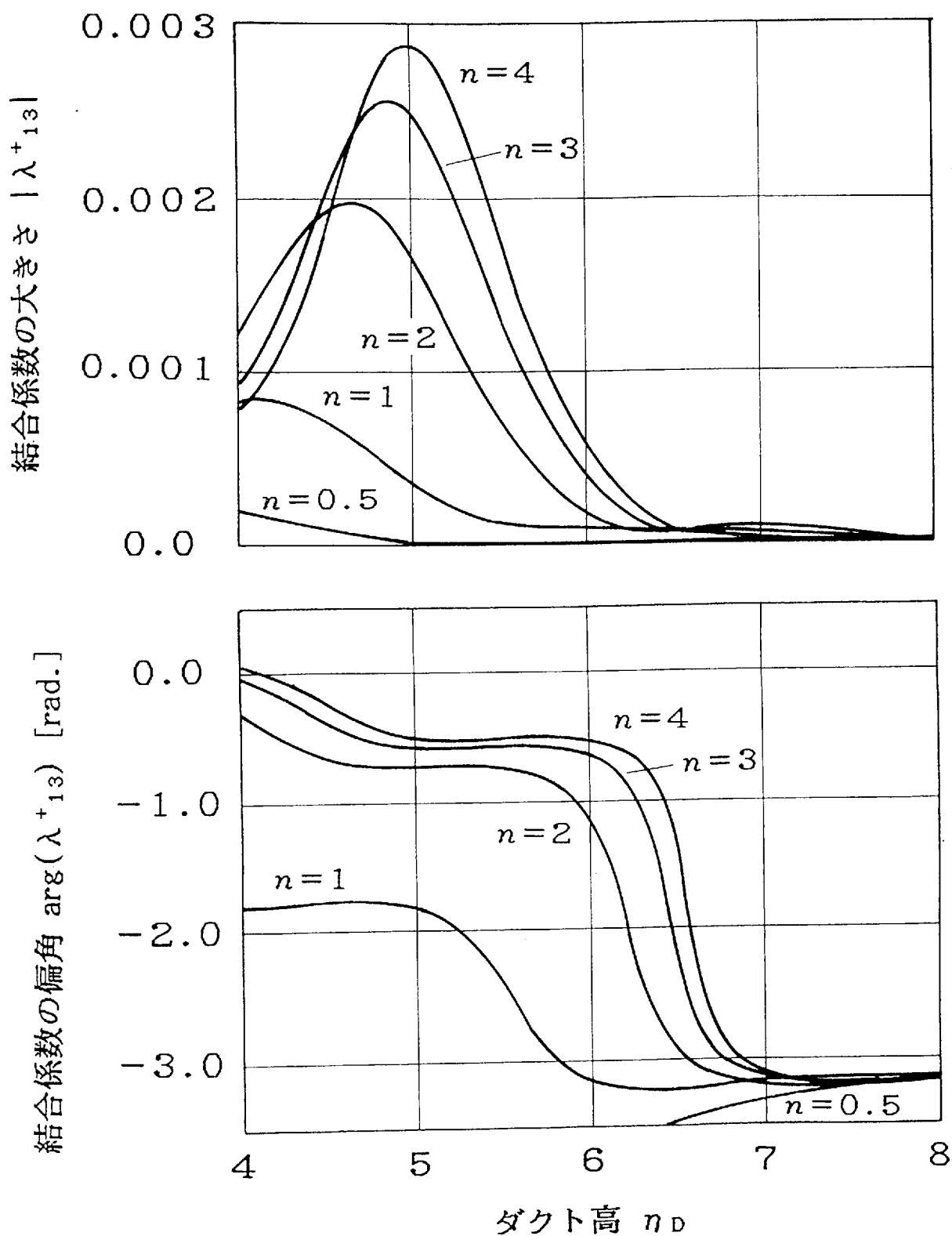


図3-10 ダクト高に対する結合係数 $\lambda^+_{13}$ の変動特性  
ただし、 $n_s=3$ 、 $\alpha^3=-1$  (水平偏波)



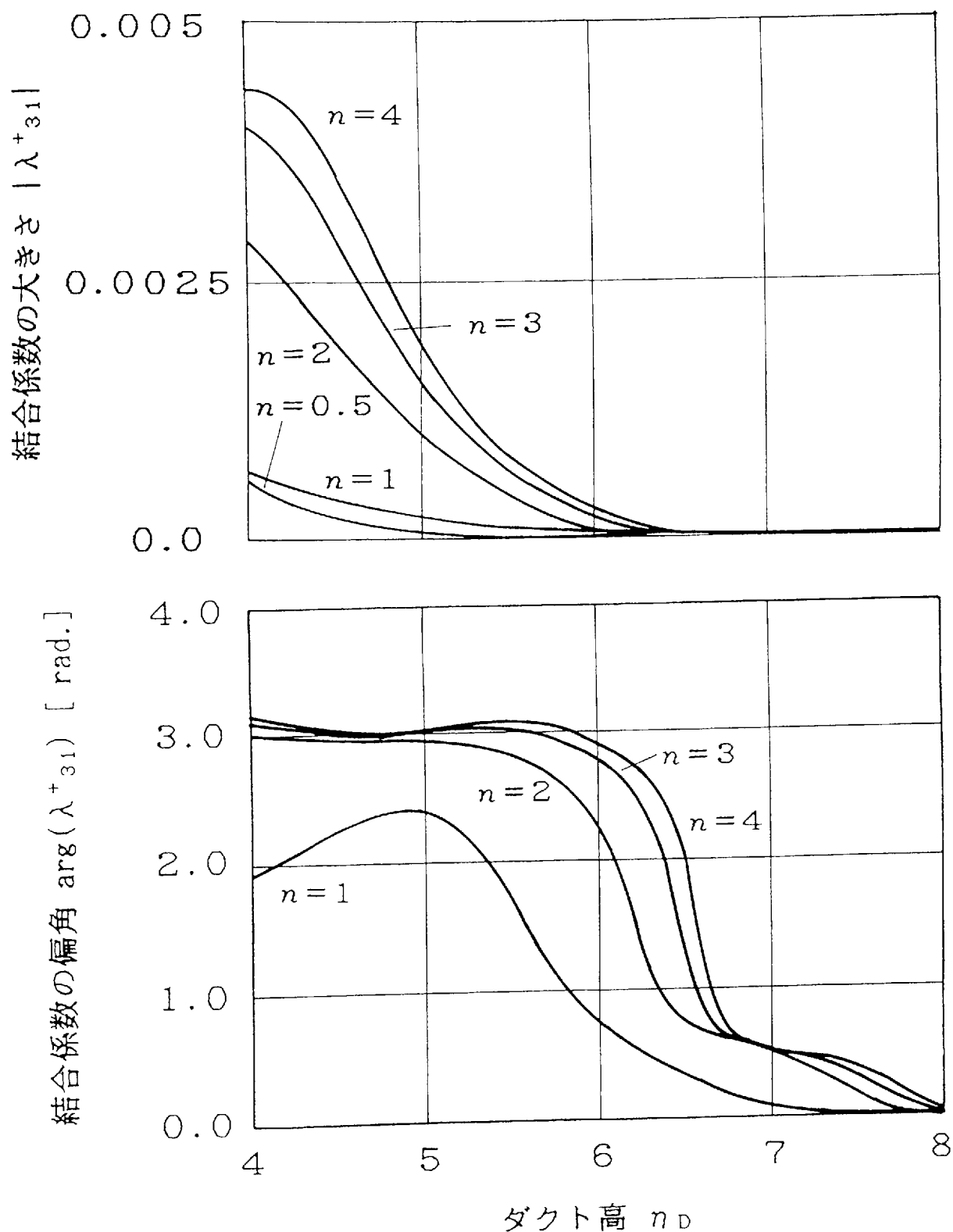


図3-11 ダクト高に対する結合係数 $\lambda_{31}^+$ の変動特性  
ただし,  $n_s = 3$ ,  $\alpha^3 = -1$  (水平偏波)

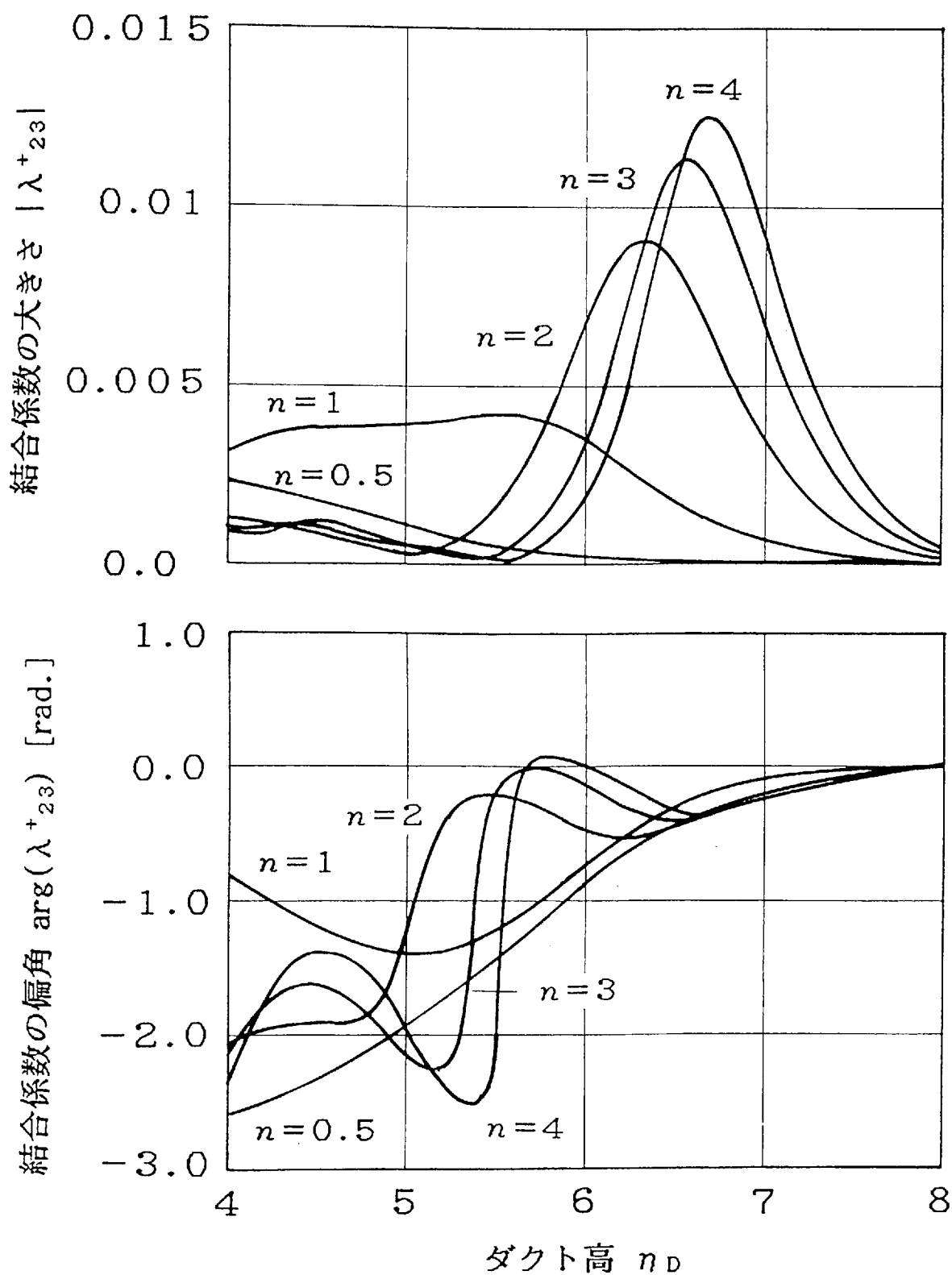


図3-12 ダクト高に対する結合係数 $\lambda^+_{23}$ の変動特性  
ただし,  $n_s=3$ ,  $\alpha^3=-1$  (水平偏波)

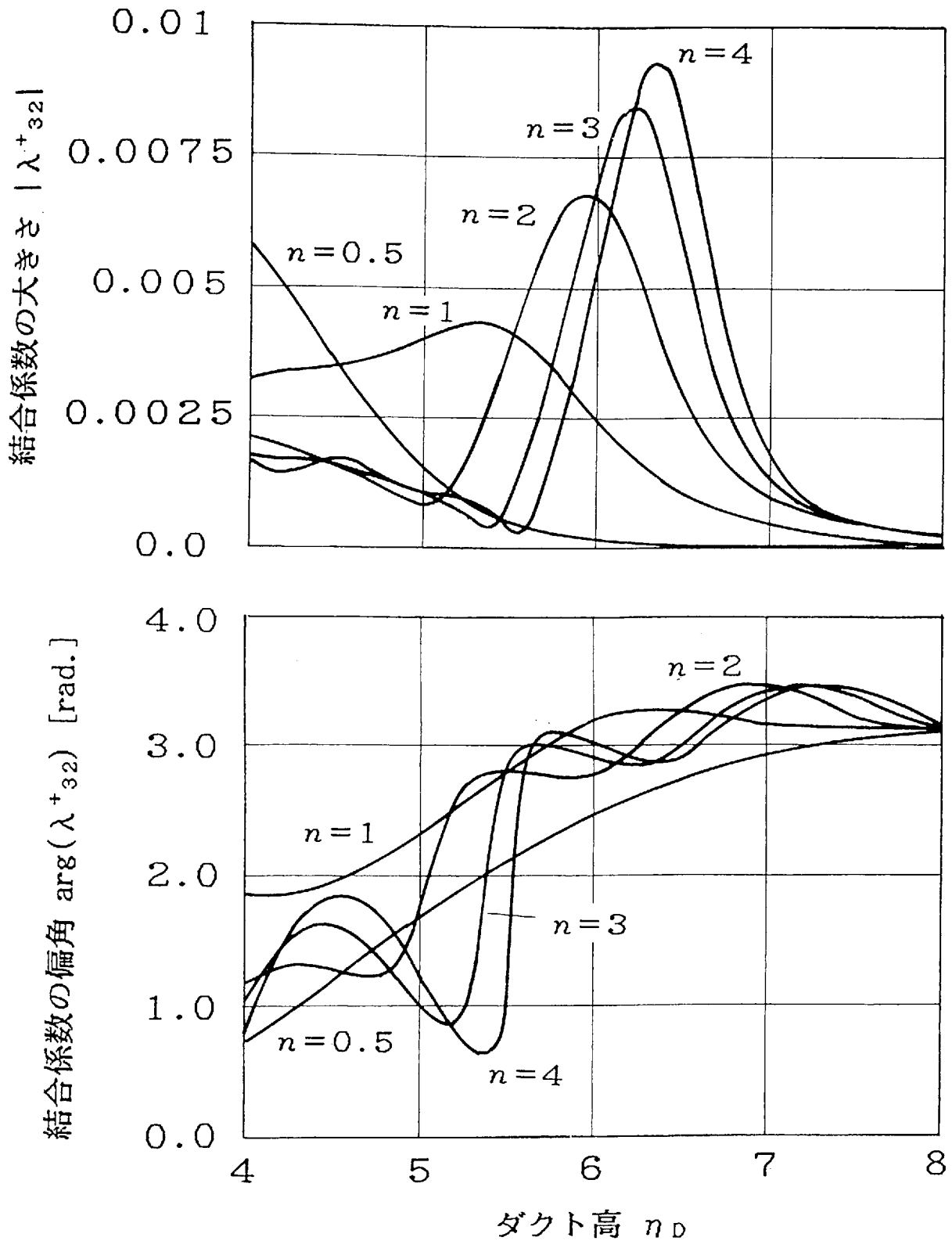


図3-13 ダクト高に対する結合係数 $\lambda^+_{32}$ の変動特性  
ただし,  $n_s=3$ ,  $\alpha^3=-1$  (水平偏波)

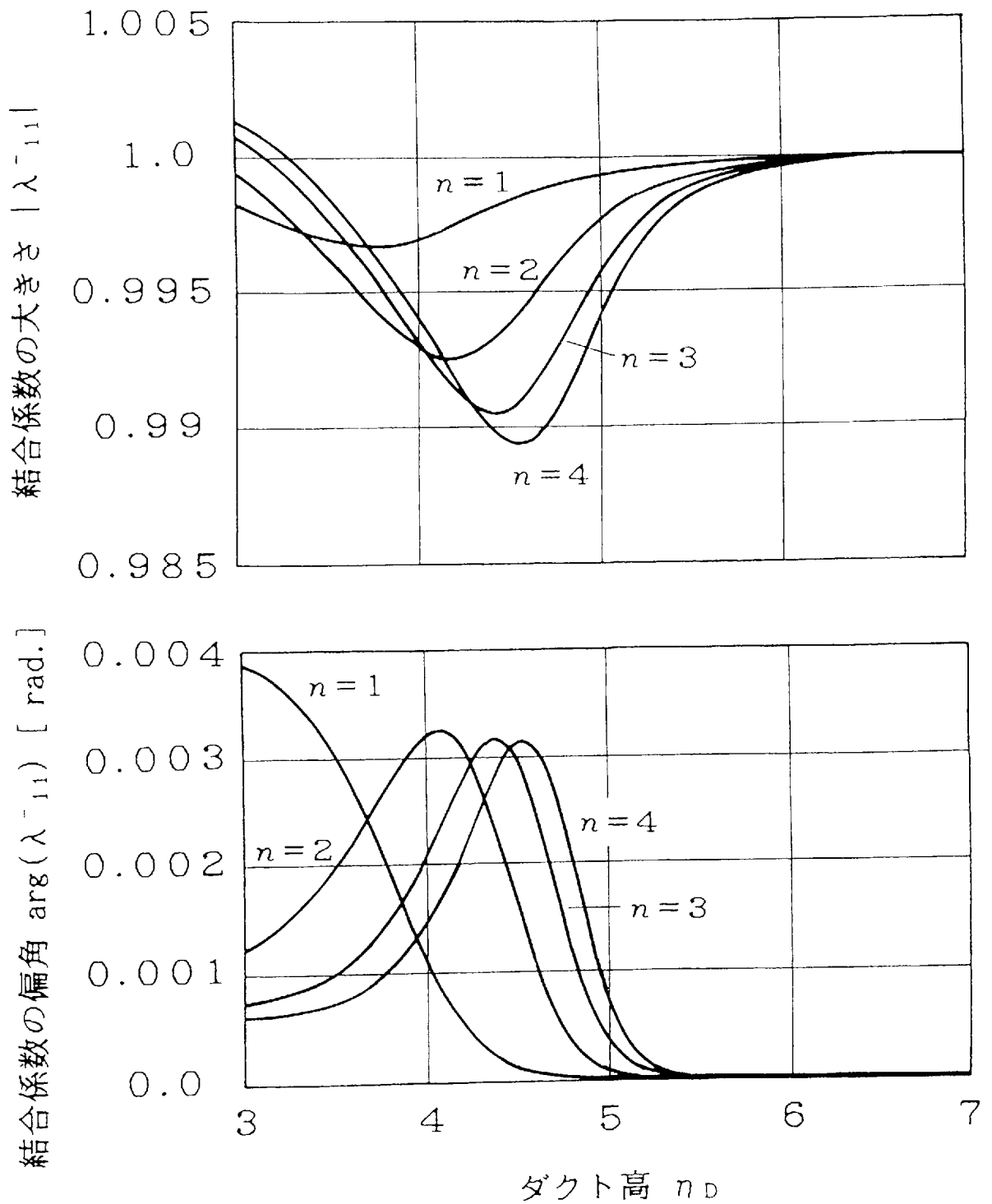


図3-14 ダクト高に対する結合係数  $\lambda^{-11}$  の変動特性  
 ただし,  $n_s = 3$ ,  $\alpha^3 = -1$  (水平偏波)

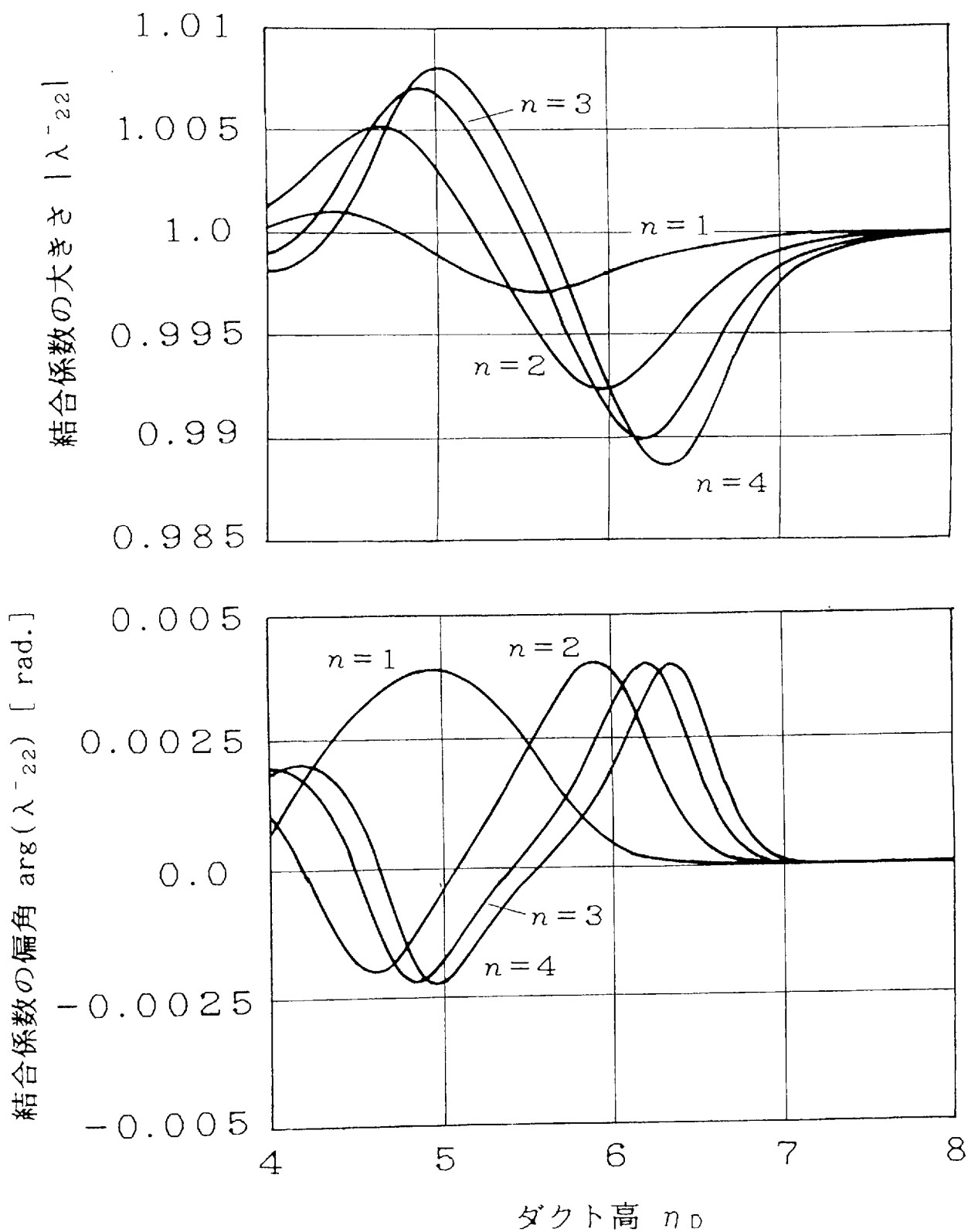


図3-15 ダクト高に対する結合係数 $\lambda^{-22}$ の変動特性  
ただし,  $n_s=3$ ,  $\alpha^3=-1$  (水平偏波)

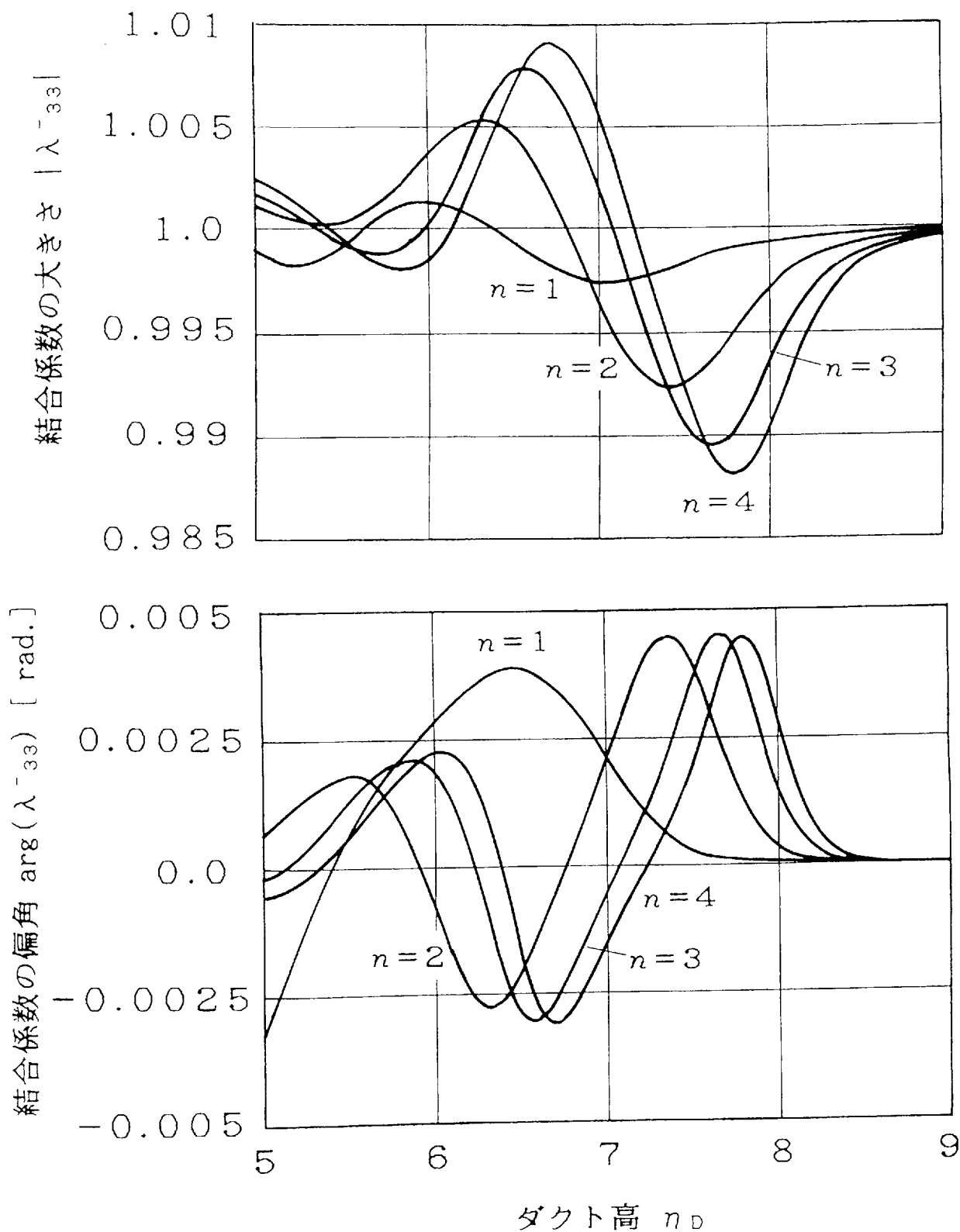


図3-16 ダクト高に対する結合係数 $\lambda^{-33}$ の変動特性  
ただし,  $n_s=3$ ,  $\alpha^3=-1$  (水平偏波)

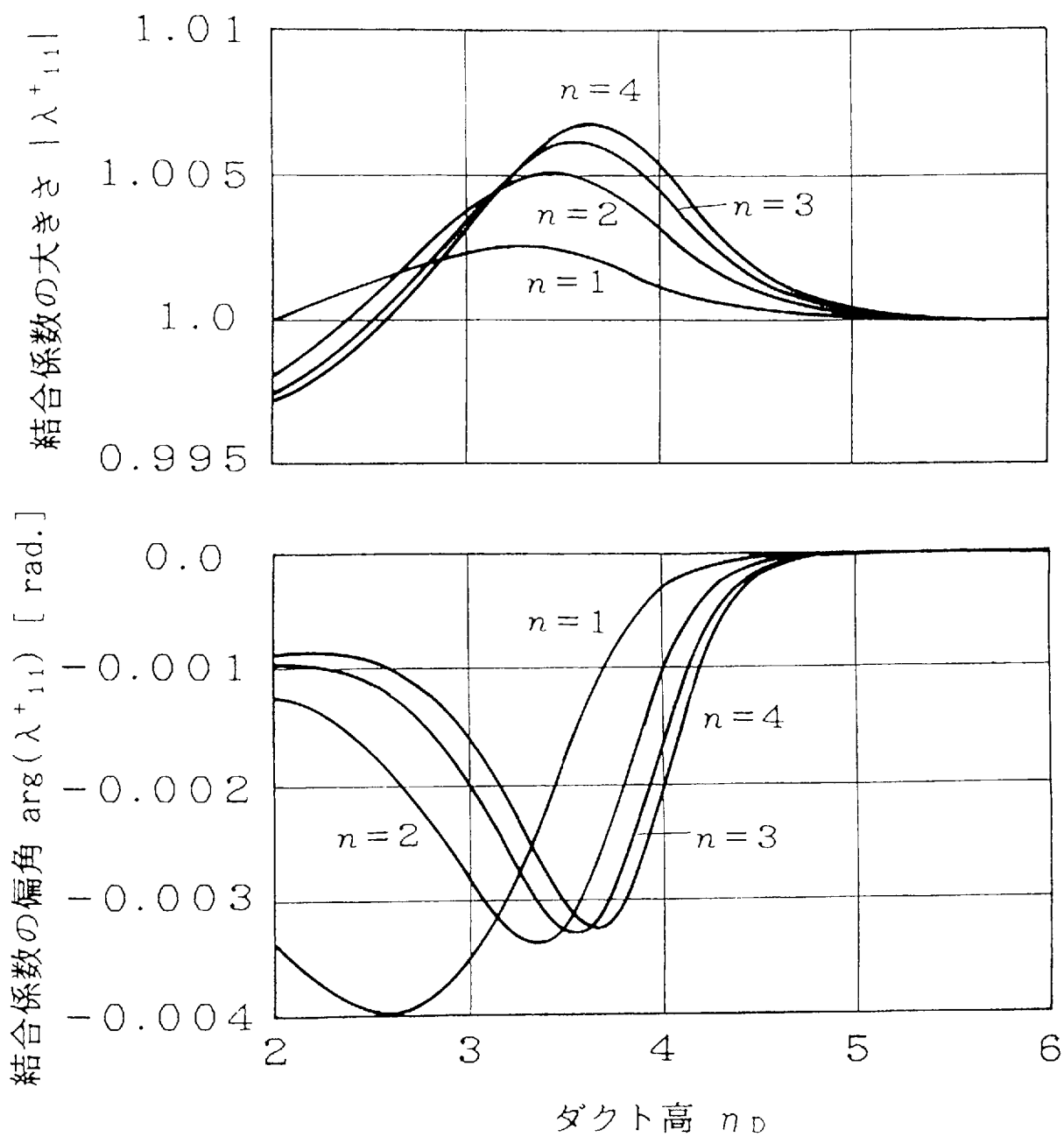


図3-17 ダクト高に対する結合係数  $\lambda^+_{11}$  の変動特性  
 ただし,  $n_s = 2$ ,  $\alpha^3 = -1$  (水平偏波)

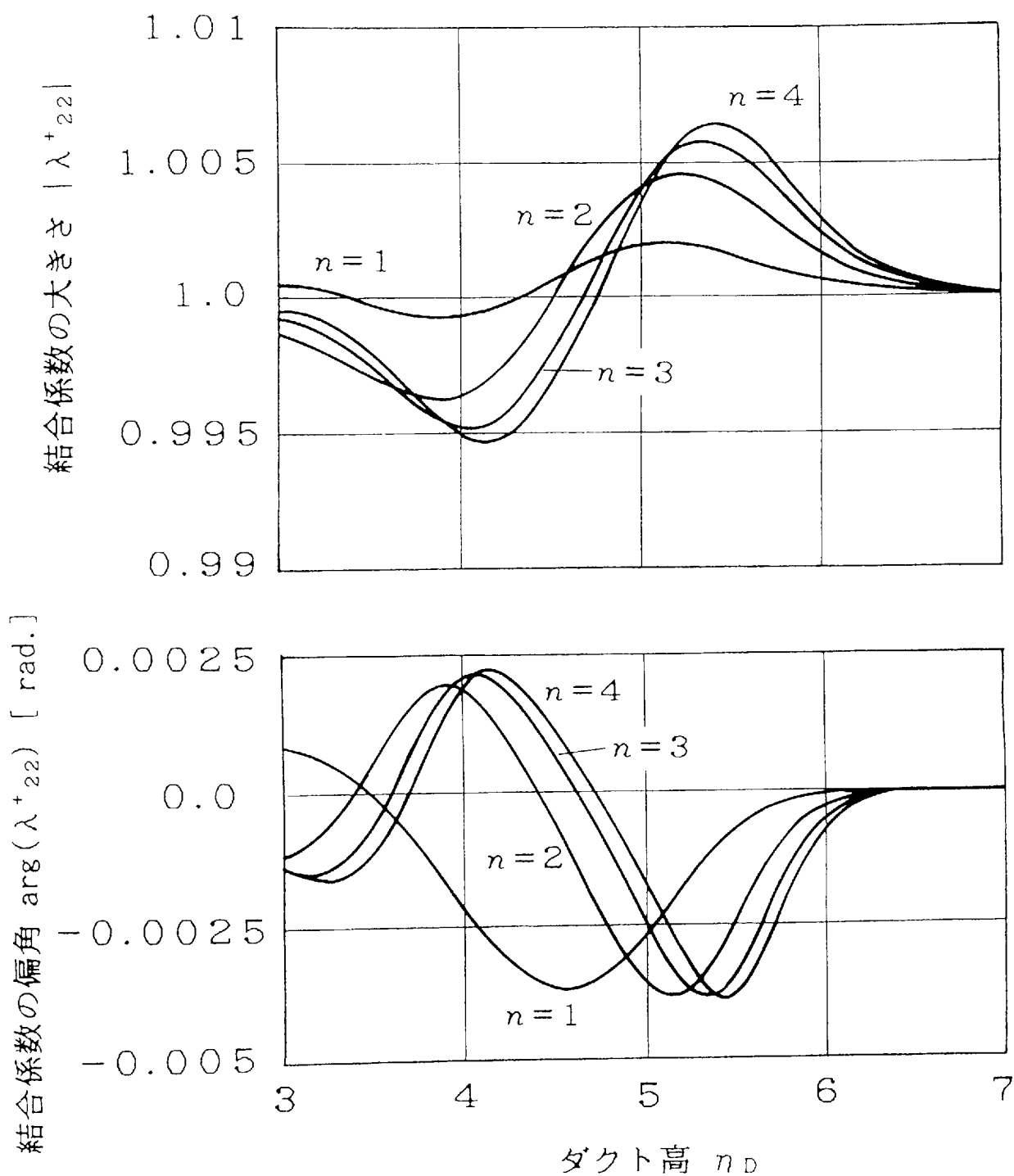


図3-18 ダクト高に対する結合係数  $\lambda^+_{22}$  の変動特性  
ただし,  $n_s=2$ ,  $\alpha^3=-1$  (水平偏波)



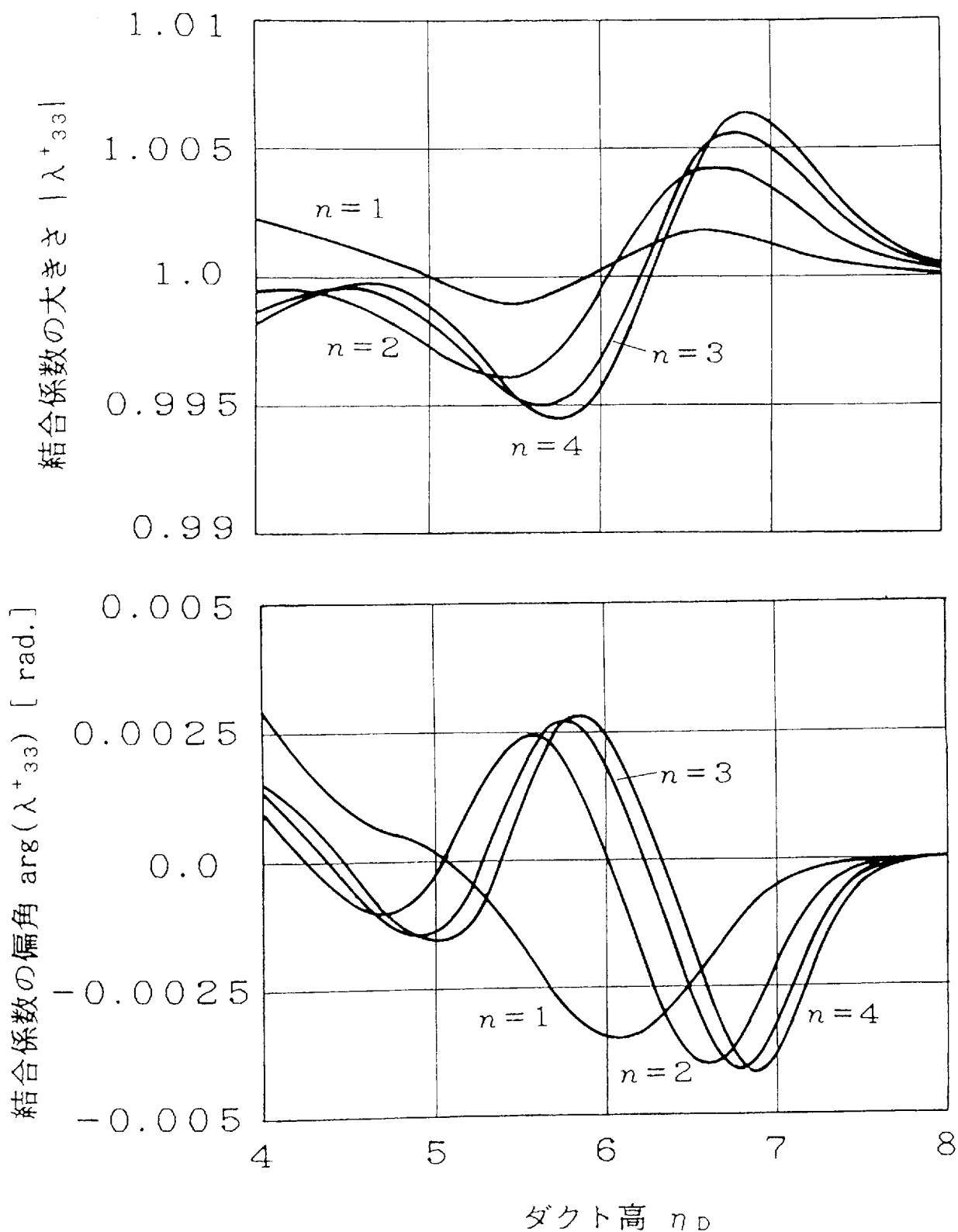


図3-19 ダクト高に対する結合係数  $\lambda^+_{33}$  の変動特性  
ただし,  $n_s=2$ ,  $\alpha^3=-1$  (水平偏波)

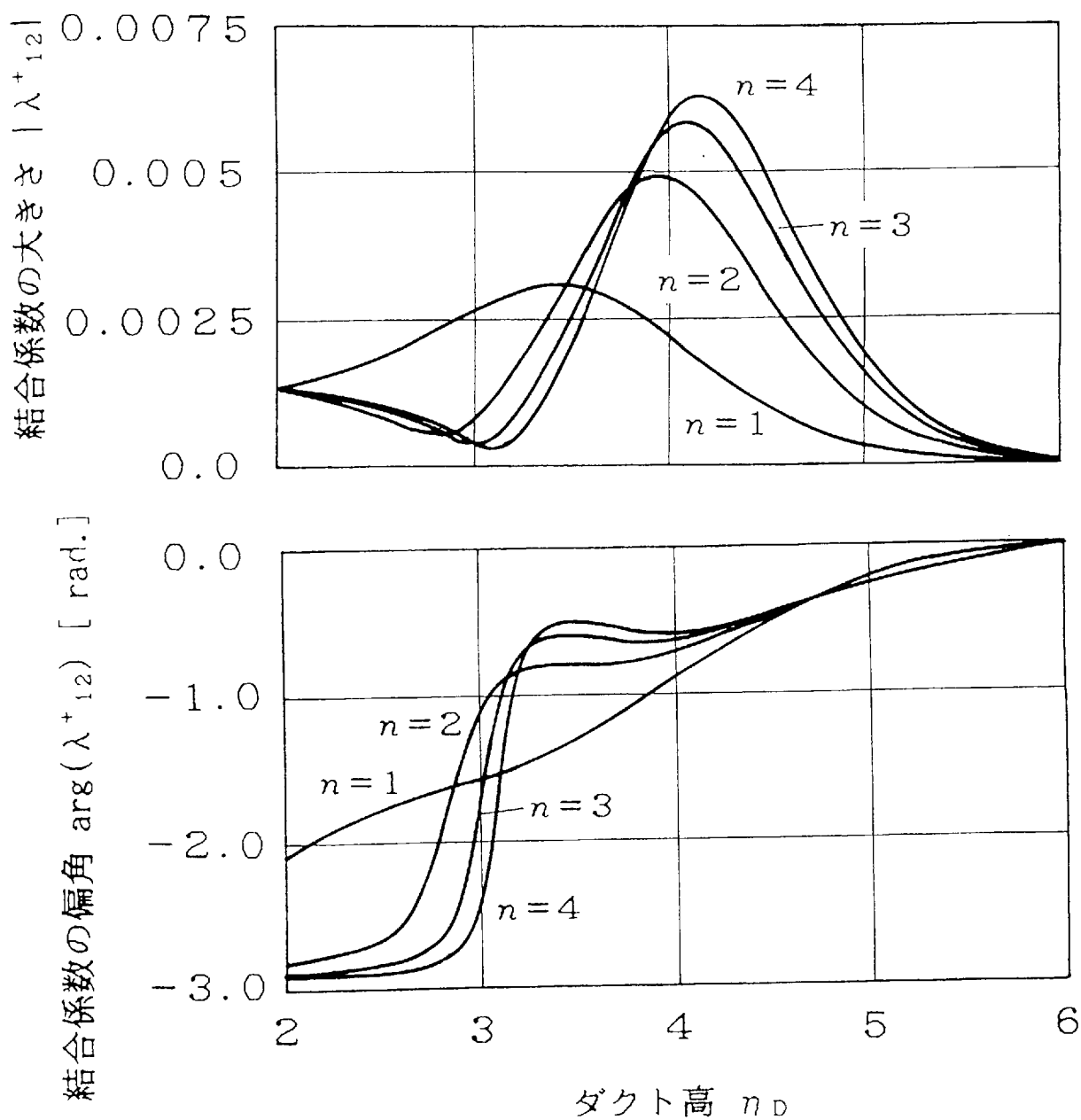


図3-20 ダクト高に対する結合係数  $\lambda^+_{12}$  の変動特性  
ただし,  $n_s=2$ ,  $\alpha^3=-1$  (水平偏波)

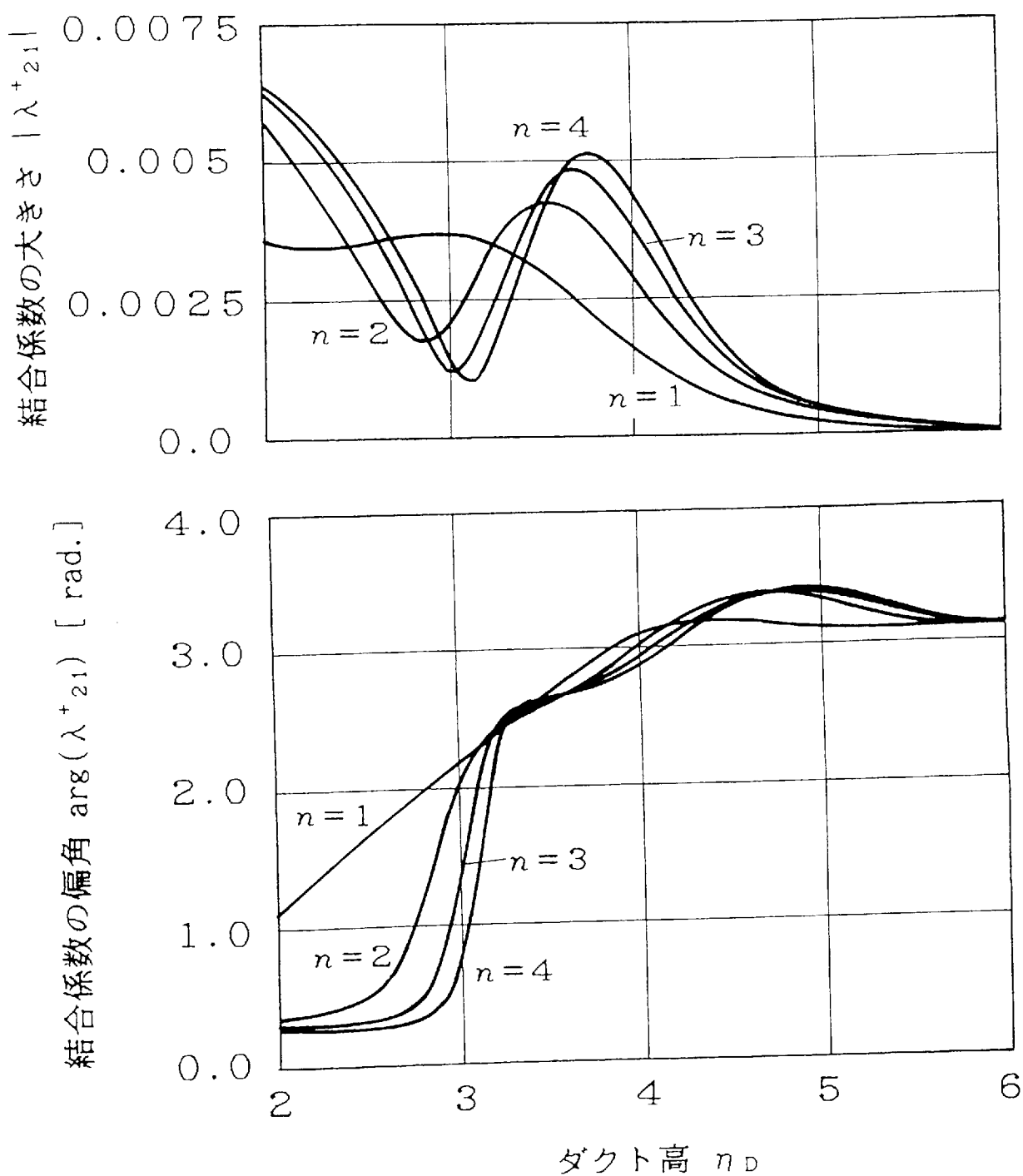


図3-21 ダクト高に対する結合係数  $\lambda^+_{21}$  の変動特性  
 ただし,  $n_s=2$ ,  $\alpha^3=-1$  (水平偏波)

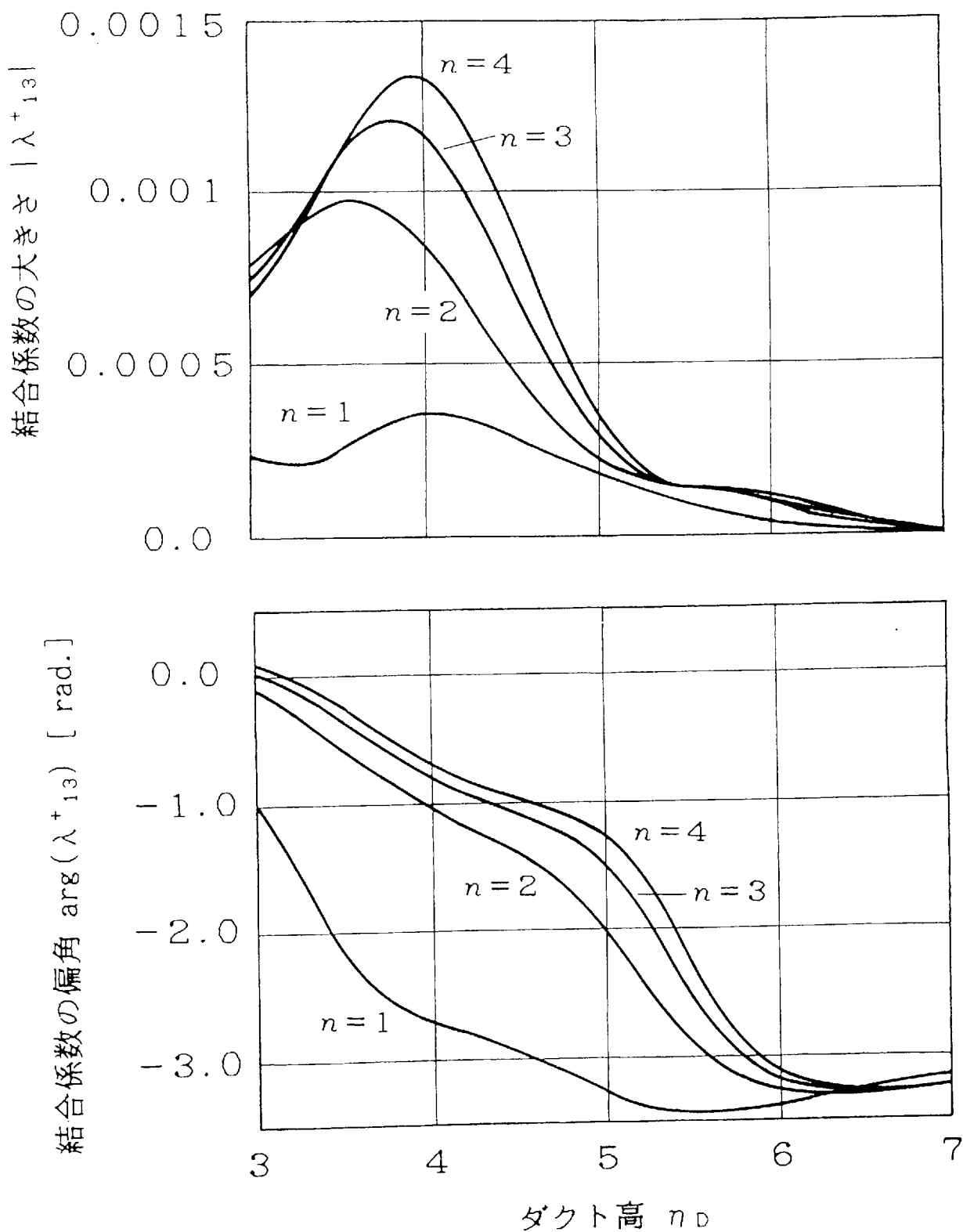


図3-22 ダクト高に対する結合係数  $\lambda^+_{13}$  の変動特性  
 ただし,  $n_s=2$ ,  $\alpha^3=-1$  (水平偏波)

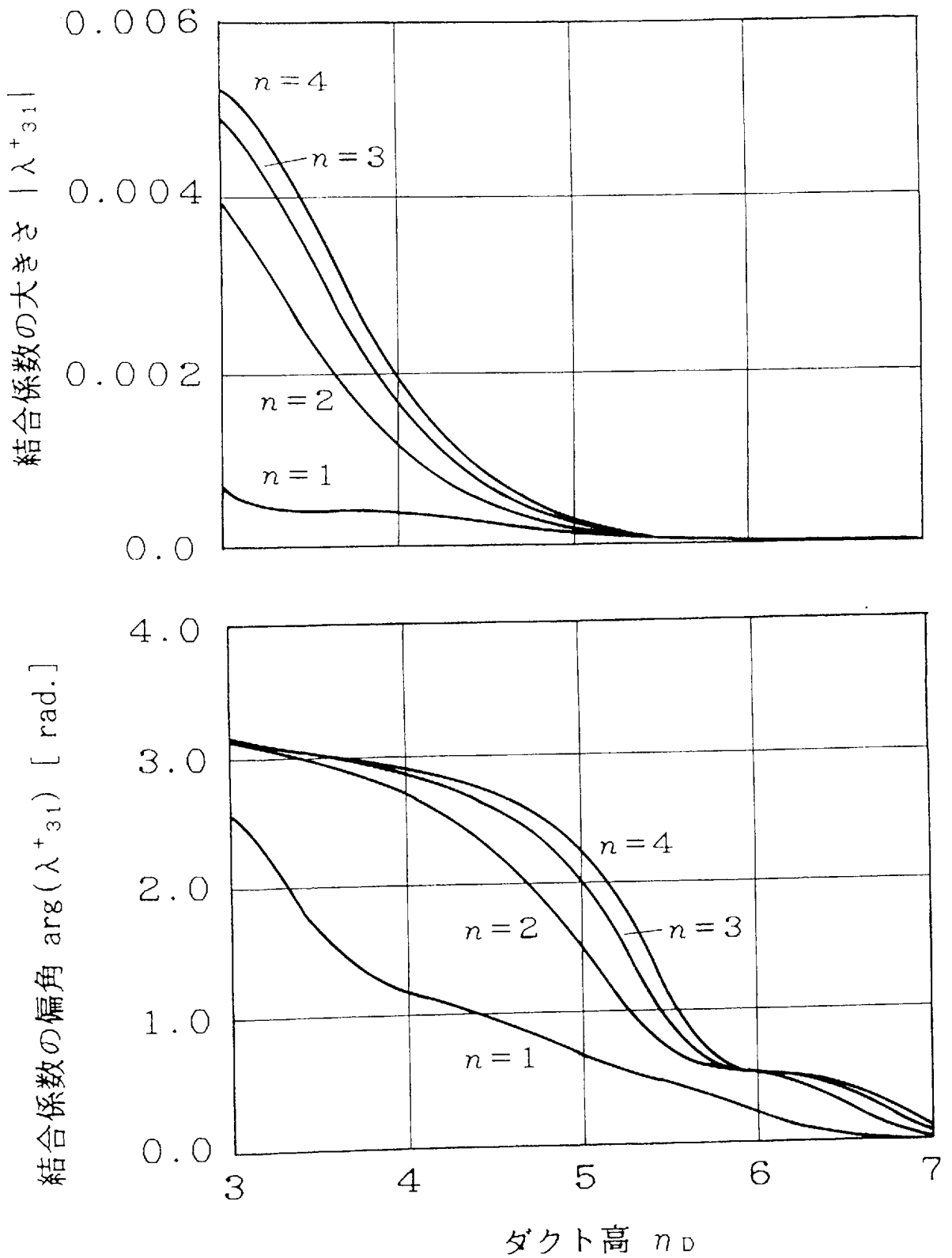


図3-23 ダクト高に対する結合係数  $\lambda_{31}^+$  の変動特性

ただし,  $n_s=2$ ,  $\alpha^3=-1$  (水平偏波)

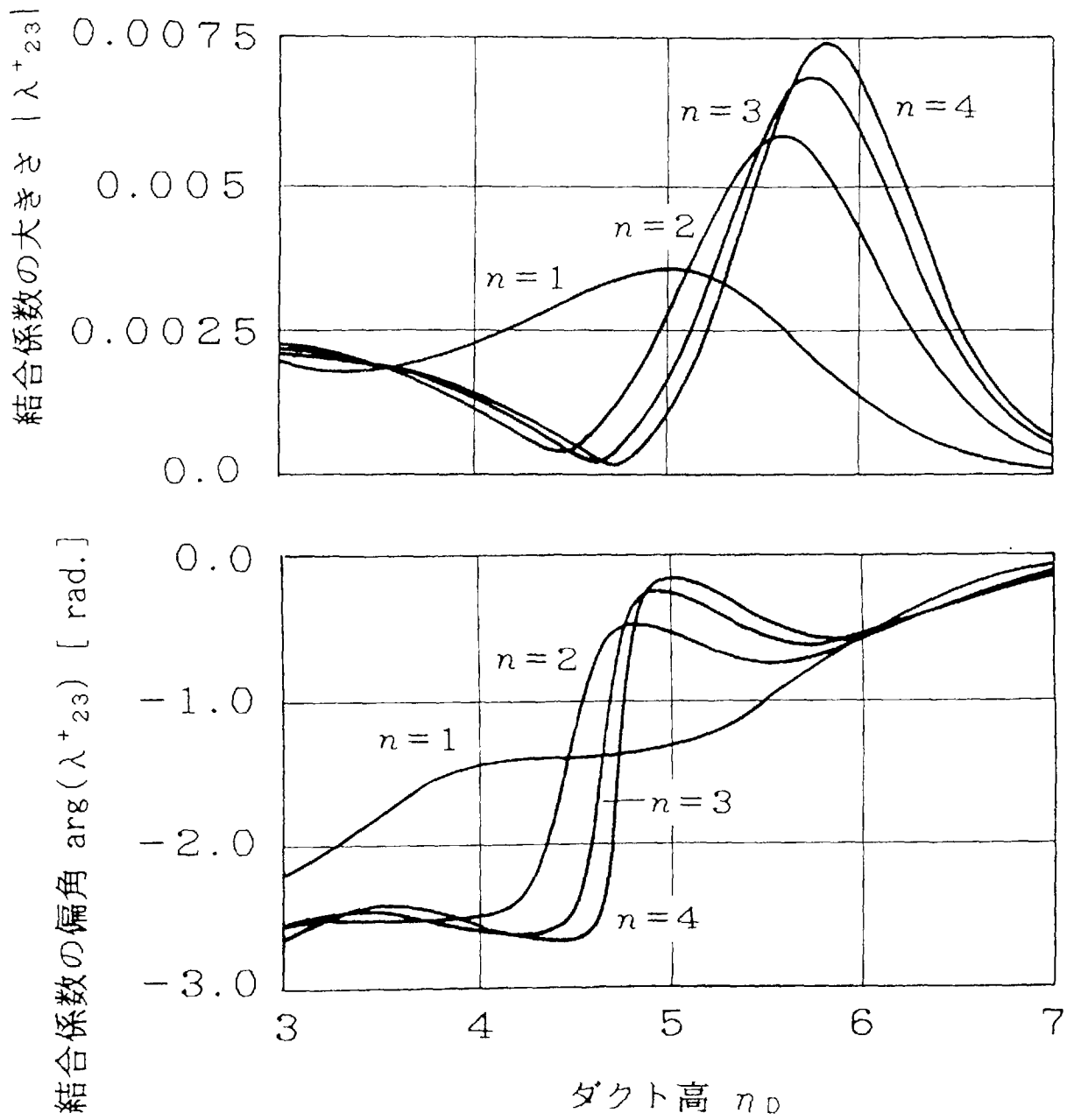


図3-24 ダクト高に対する結合係数  $\lambda^+_{23}$  の変動特性  
ただし,  $n_s = 2$ ,  $\alpha^3 = -1$  (水平偏波)

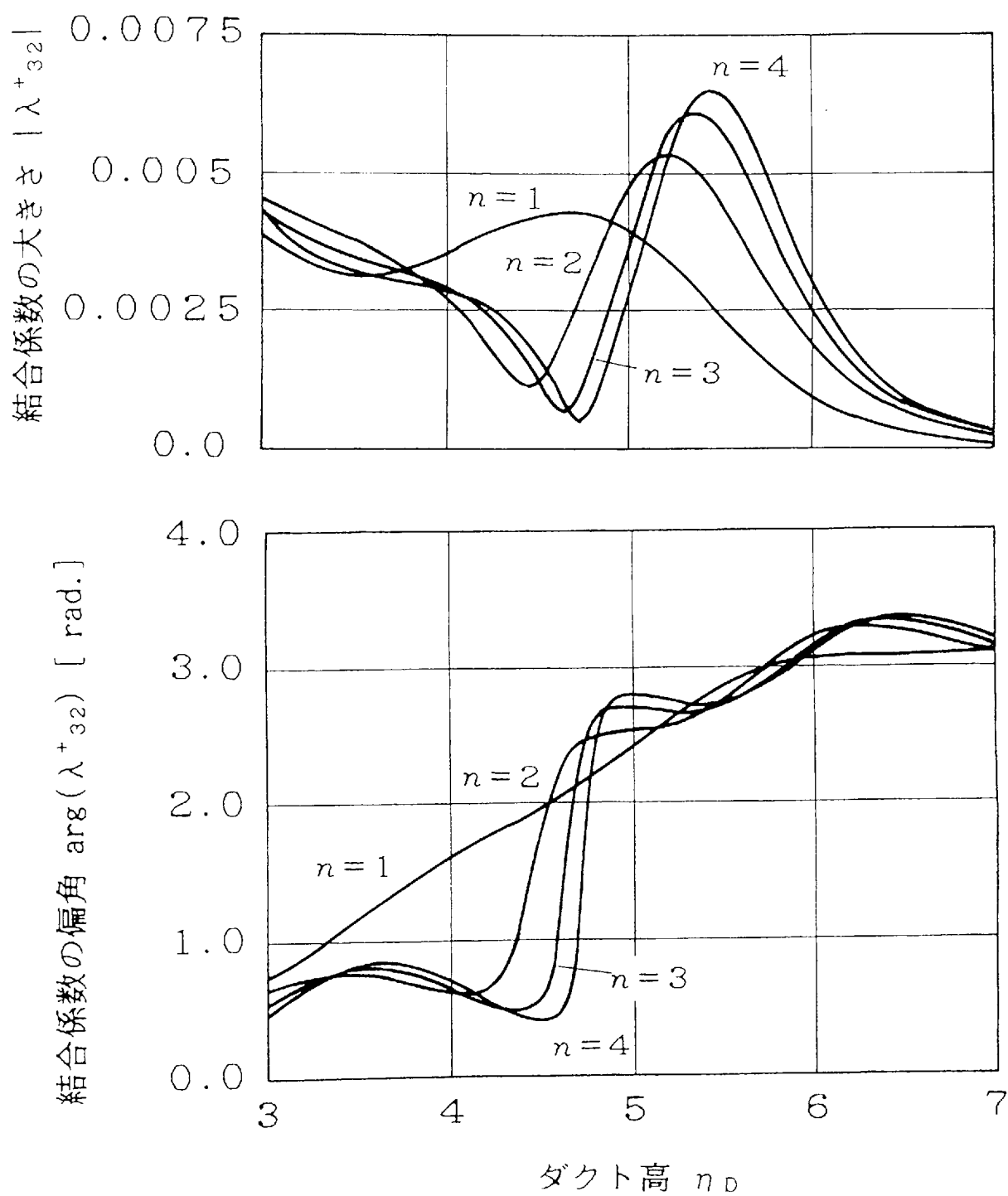


図3-25 ダクト高に対する結合係数  $\lambda^+_{32}$  の変動特性  
 ただし,  $n_s=2$ ,  $\alpha^3=-1$  (水平偏波)

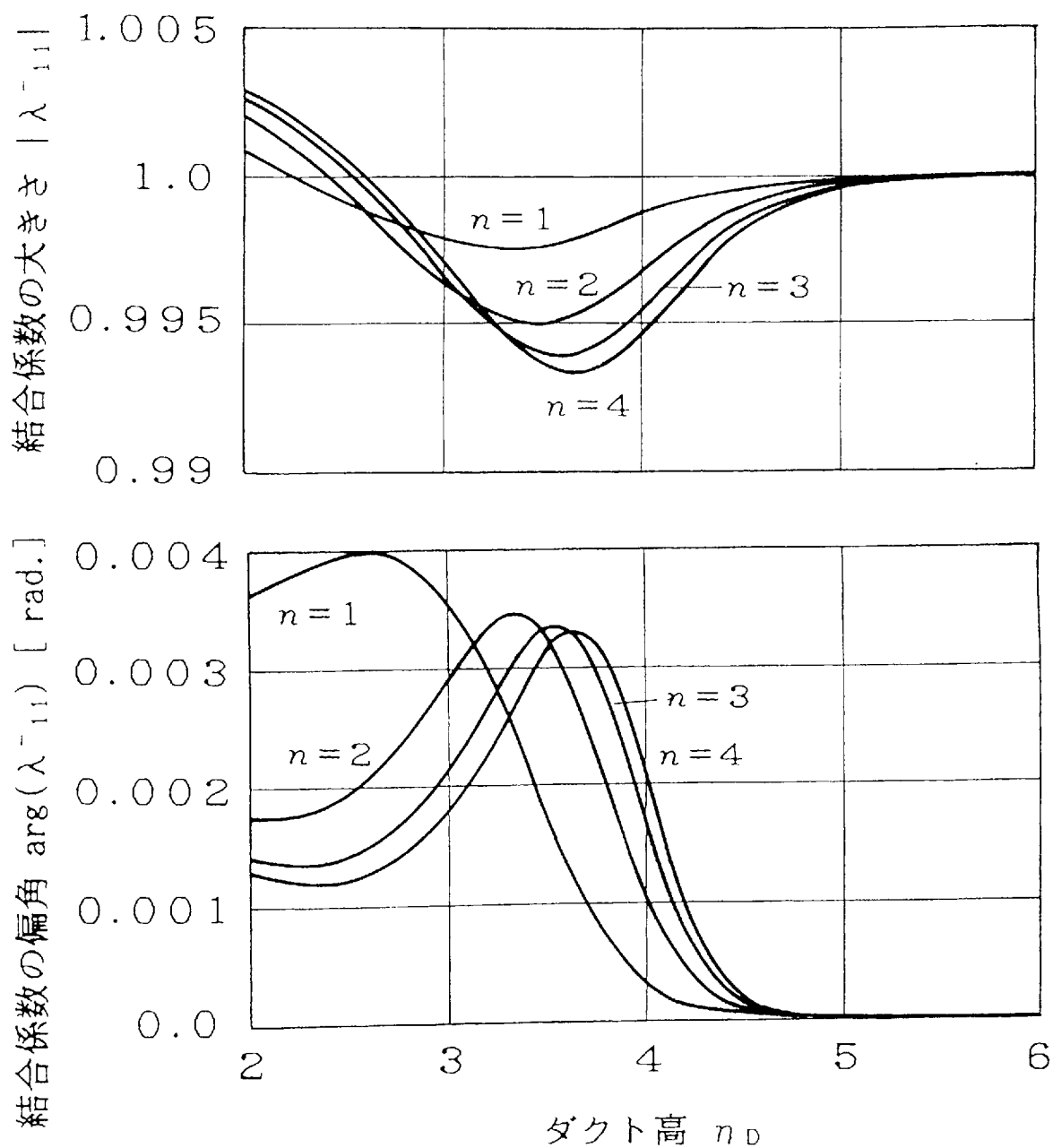


図3-26 ダクト高に対する結合係数 $\lambda^{-11}$ の変動特性  
ただし,  $n_s=2$ ,  $\alpha^3=-1$  (水平偏波)



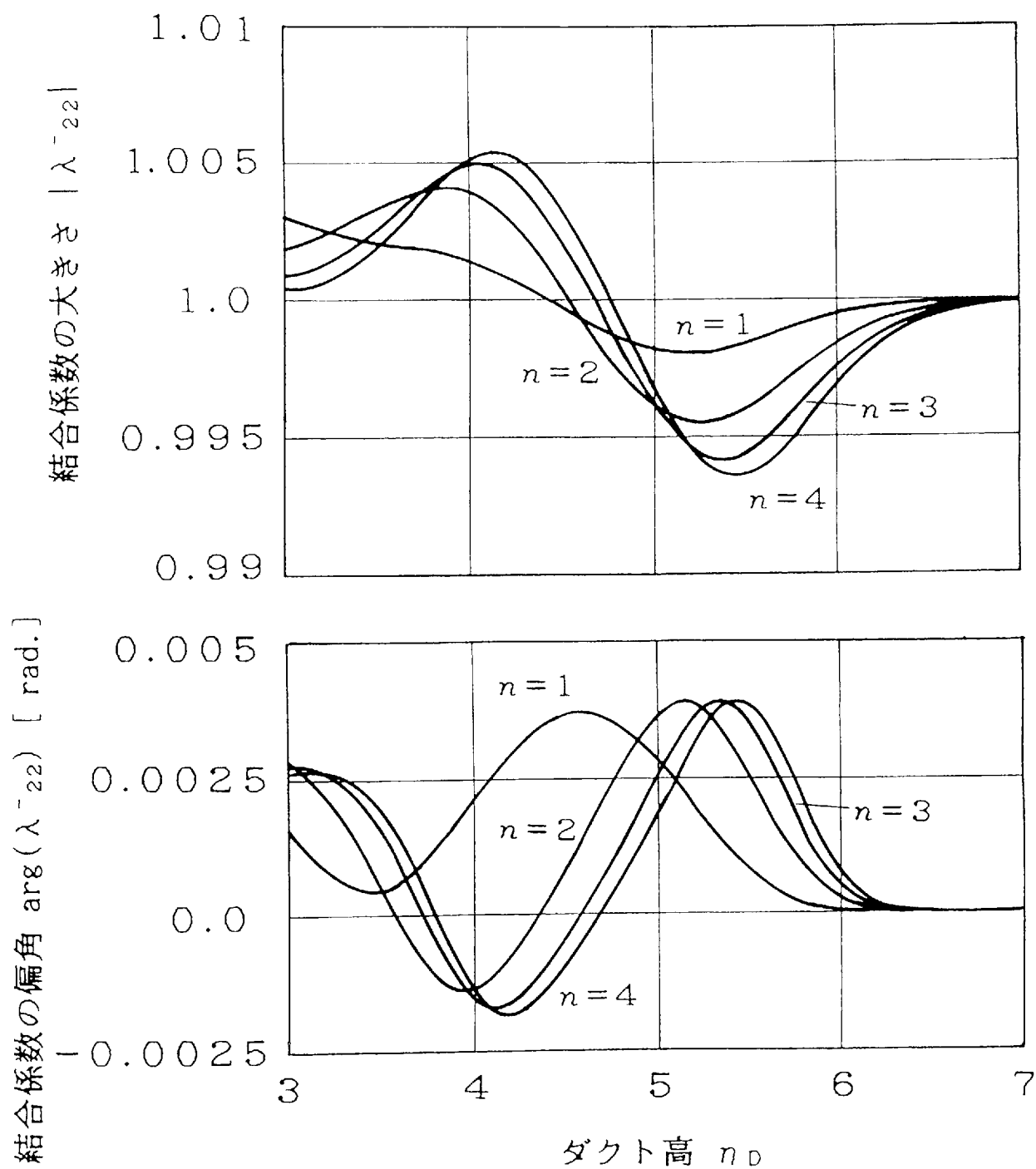


図3-27 ダクト高に対する結合係数 $\lambda^{-22}$ の変動特性  
ただし,  $n_s=2$ ,  $\alpha^3=-1$  (水平偏波)

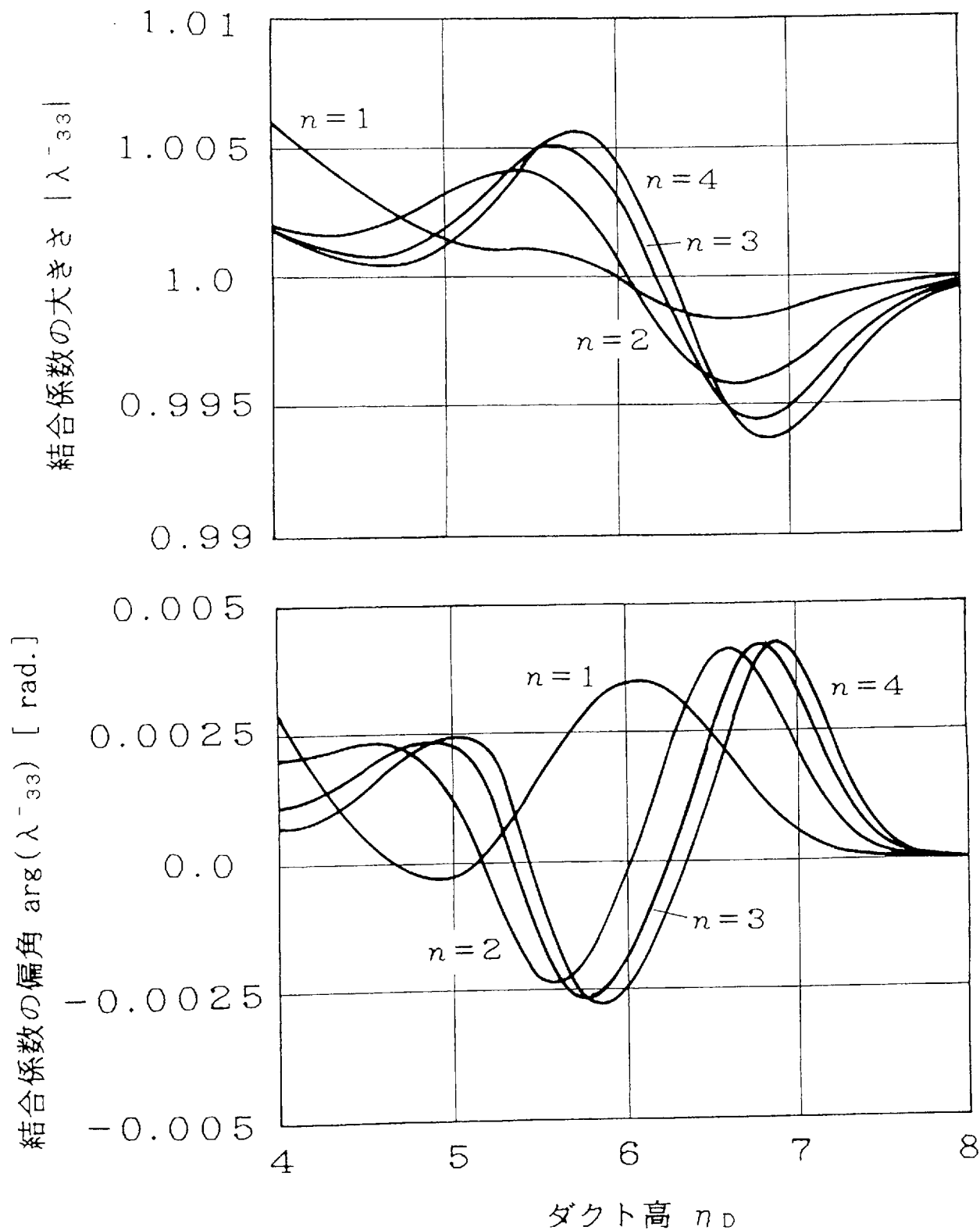


図3-28 ダクト高に対する結合係数 $\lambda^{-33}$ の変動特性  
ただし,  $n_s=2$ ,  $\alpha^3=-1$  (水平偏波)

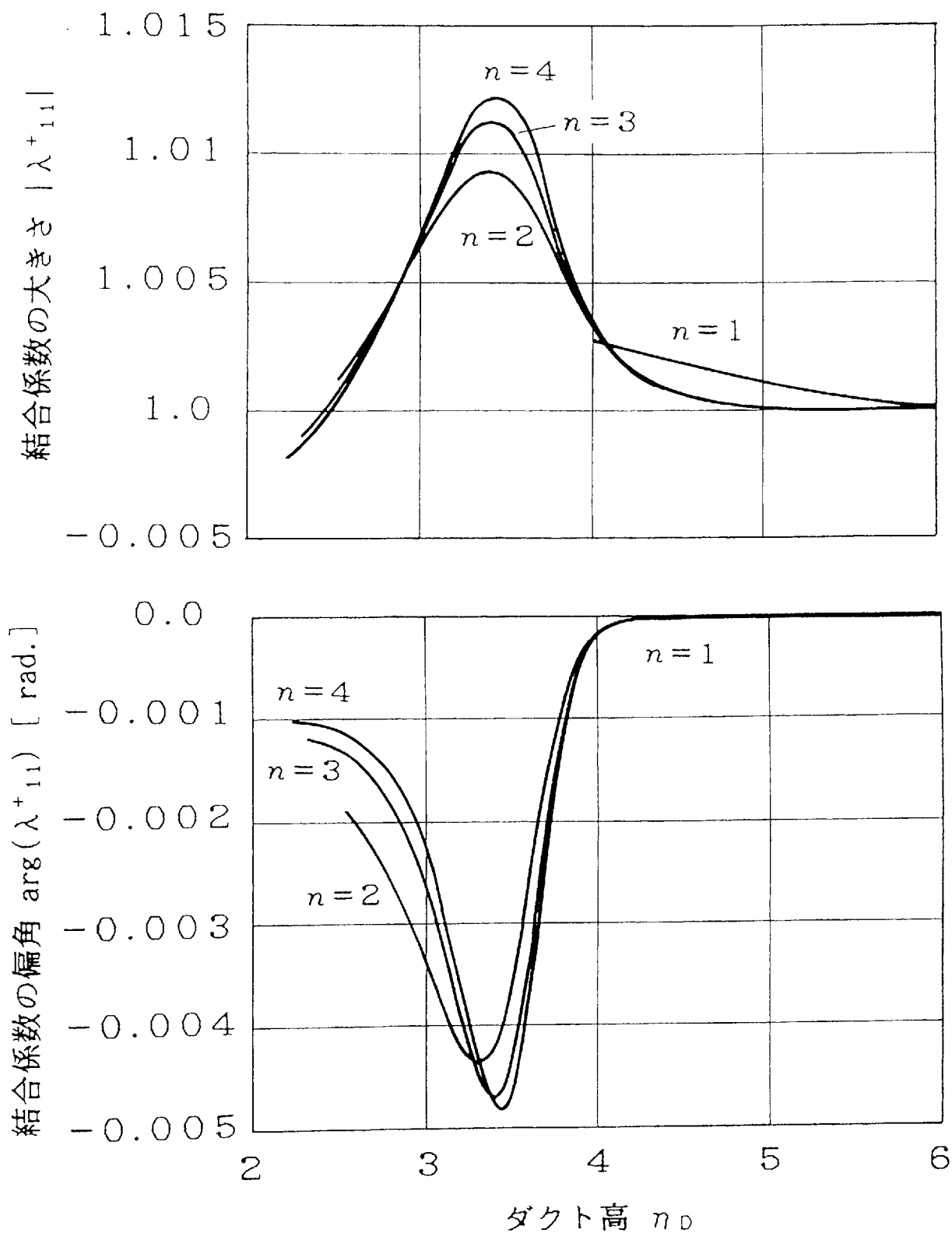


図3-29 ダクト高に対する結合係数 $\lambda^+_{11}$ の変動特性

ただし,  $n_s=2$ ,  $\alpha^3=-2$  (水平偏波)

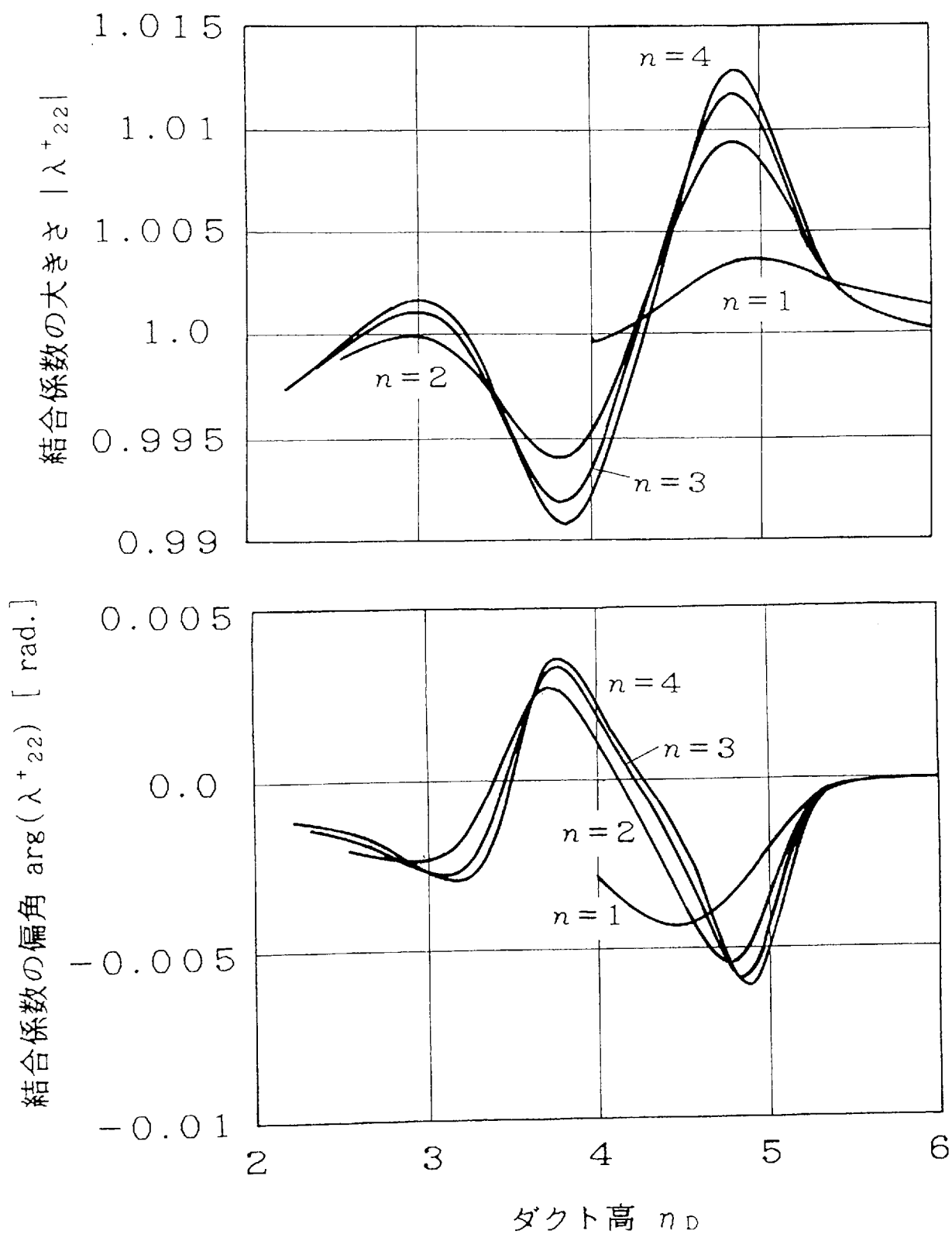


図3-30 ダクト高に対する結合係数 $\lambda^+_{22}$ の変動特性  
ただし,  $n_s=2$ ,  $\alpha^3=-2$  (水平偏波)

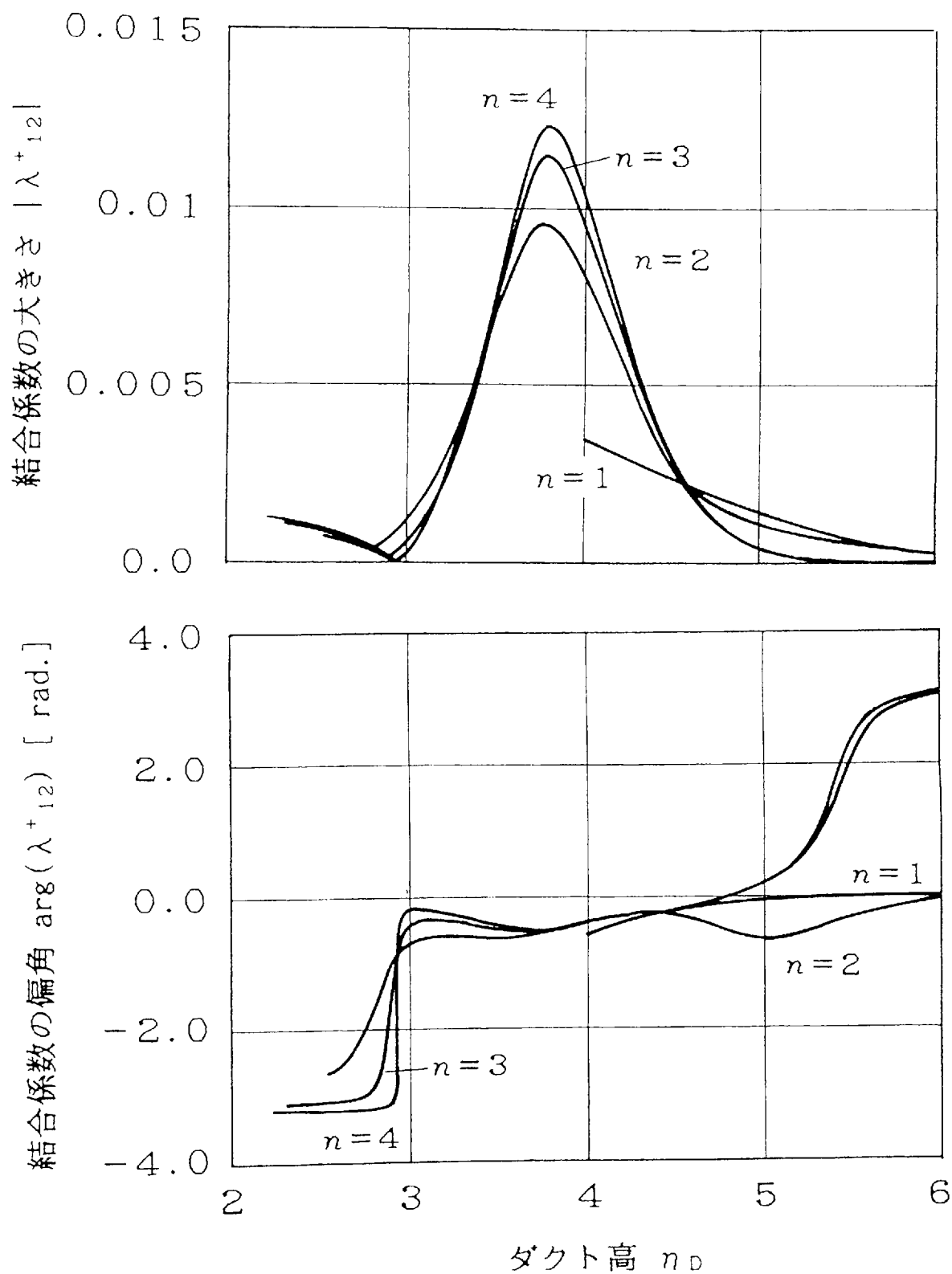


図3-31 ダクト高に対する結合係数 $\lambda^+_{12}$ の変動特性  
ただし,  $n_s=2$ ,  $\alpha^3=-2$  (水平偏波)

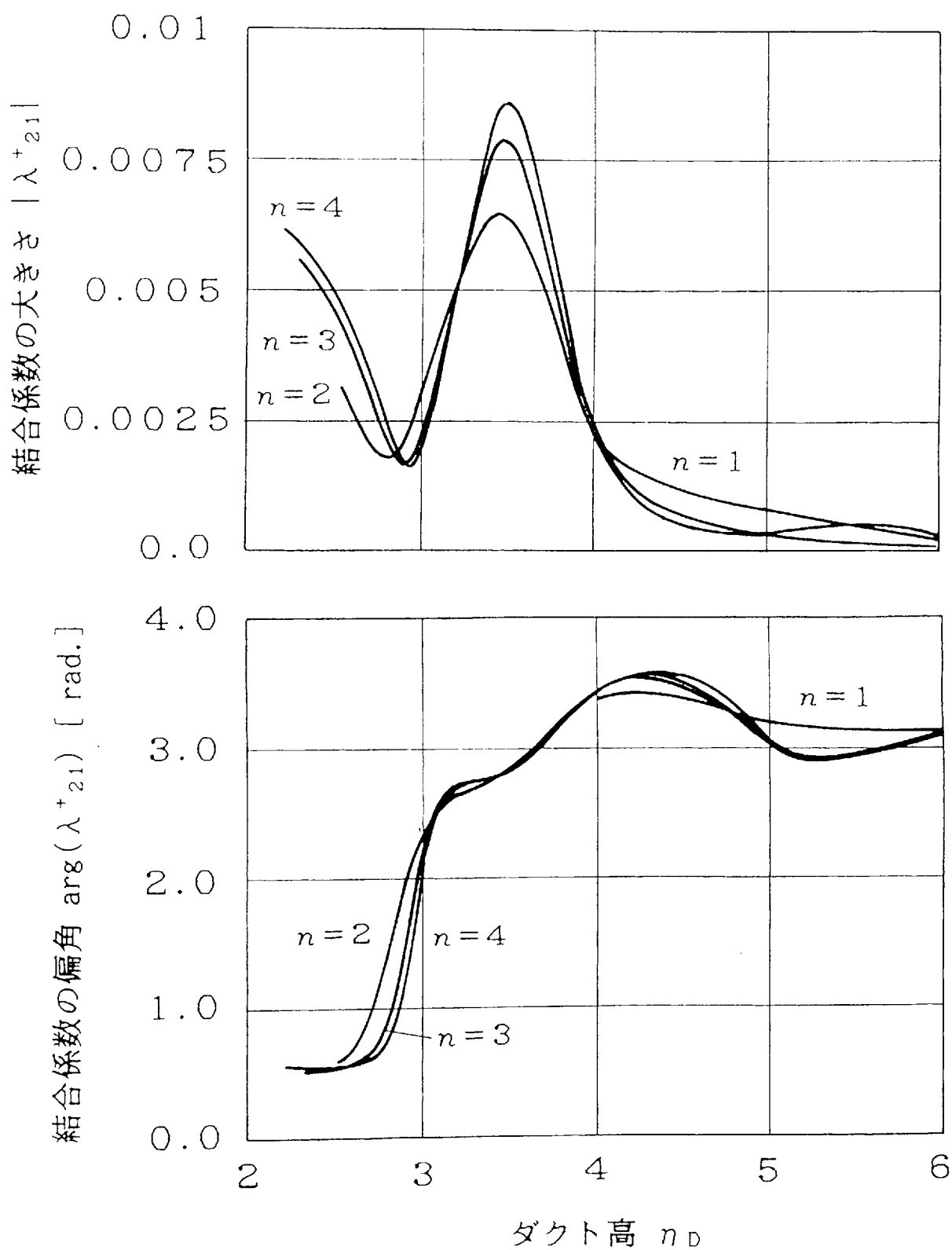


図3-32 ダクト高に対する結合係数  $\lambda^+_{21}$  の変動特性  
 ただし,  $n_s=2$ ,  $\alpha^3=-2$  (水平偏波)

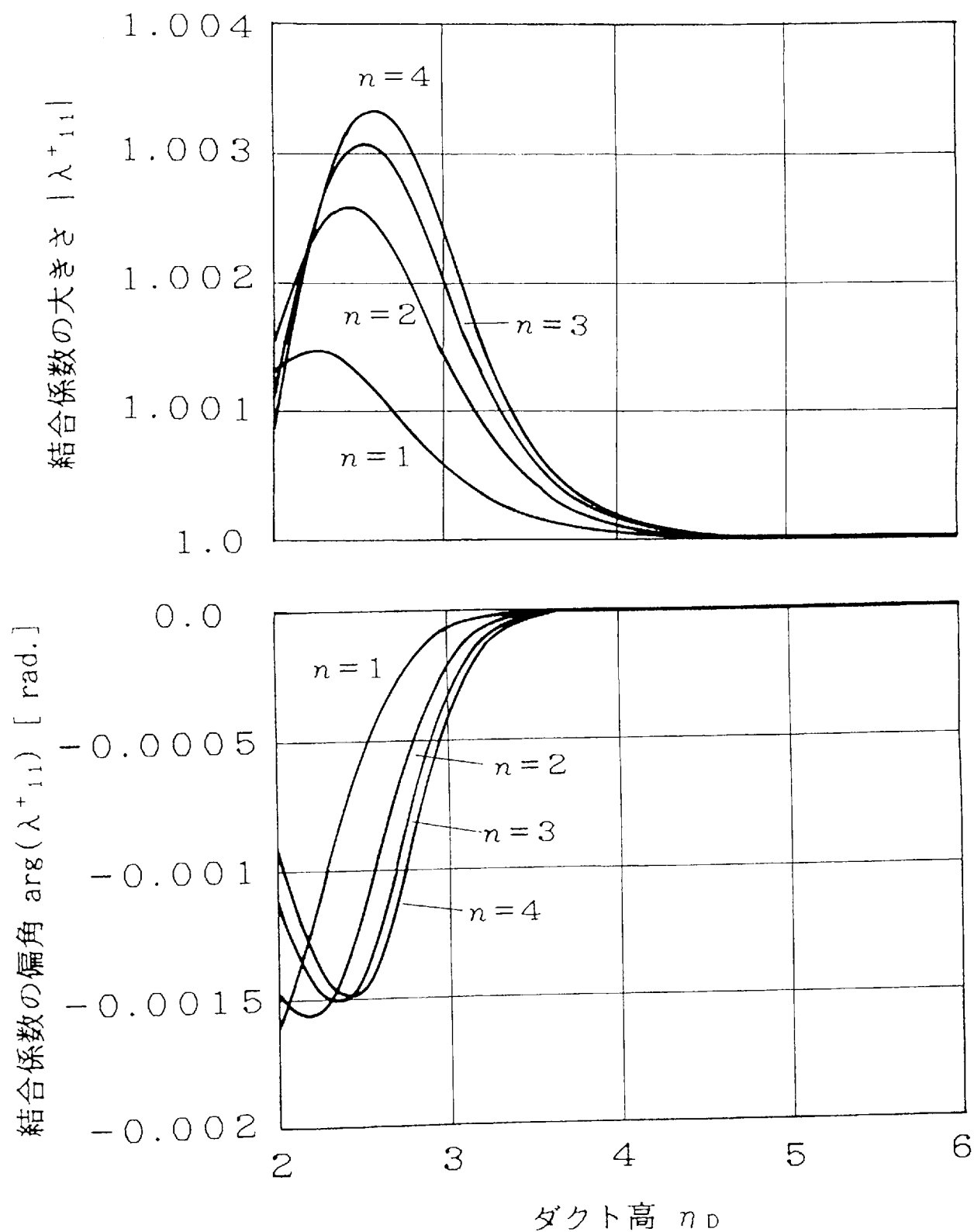


図3-33 ダクト高に対する結合係数 $\lambda^+_{11}$ の変動特性

ただし,  $n_s=2$ ,  $\alpha^3=-1$  (垂直偏波)

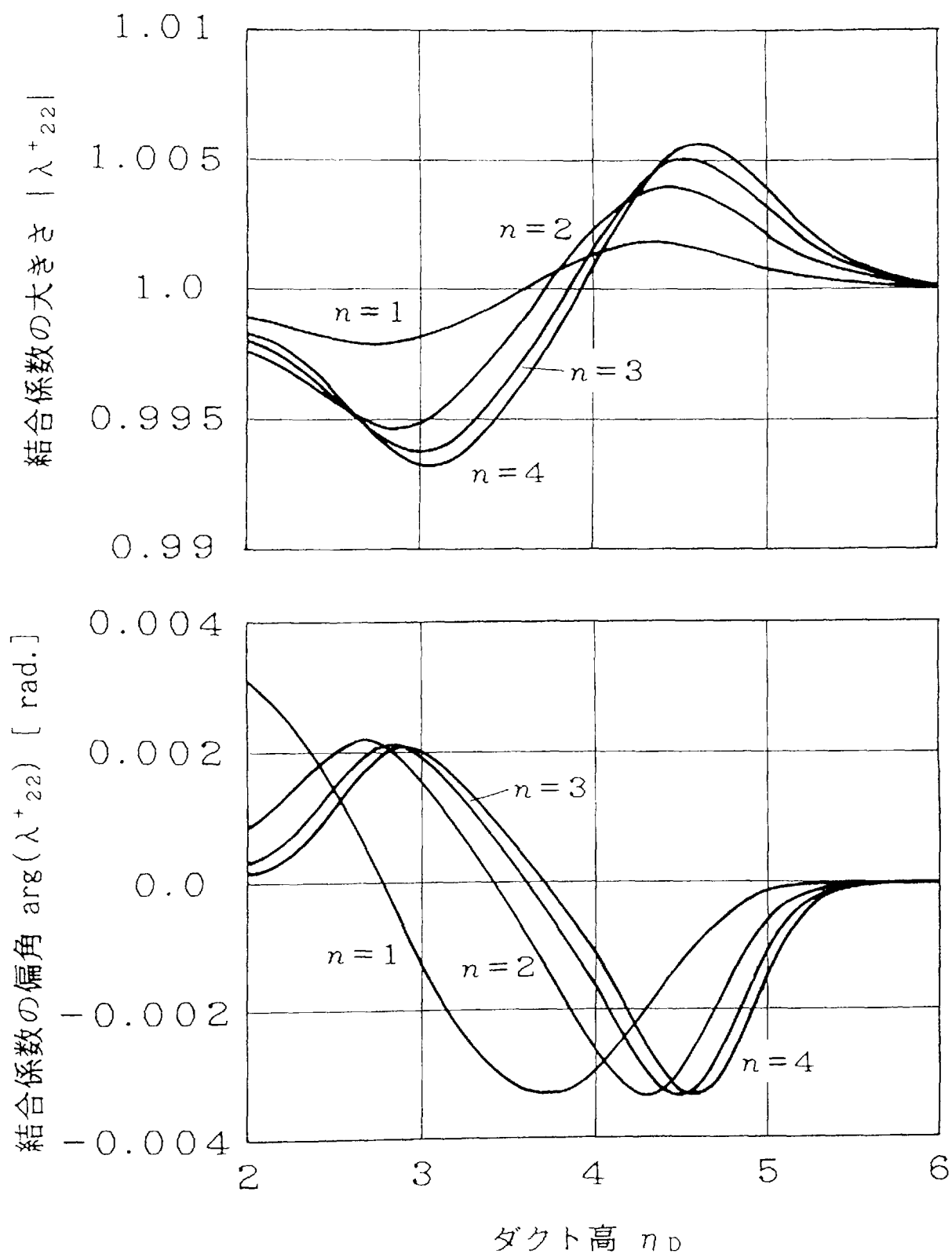


図3-34 ダクト高に対する結合係数  $\lambda^+_{22}$  の変動特性  
 ただし,  $n_s=2$ ,  $\alpha^3=-1$  (垂直偏波)



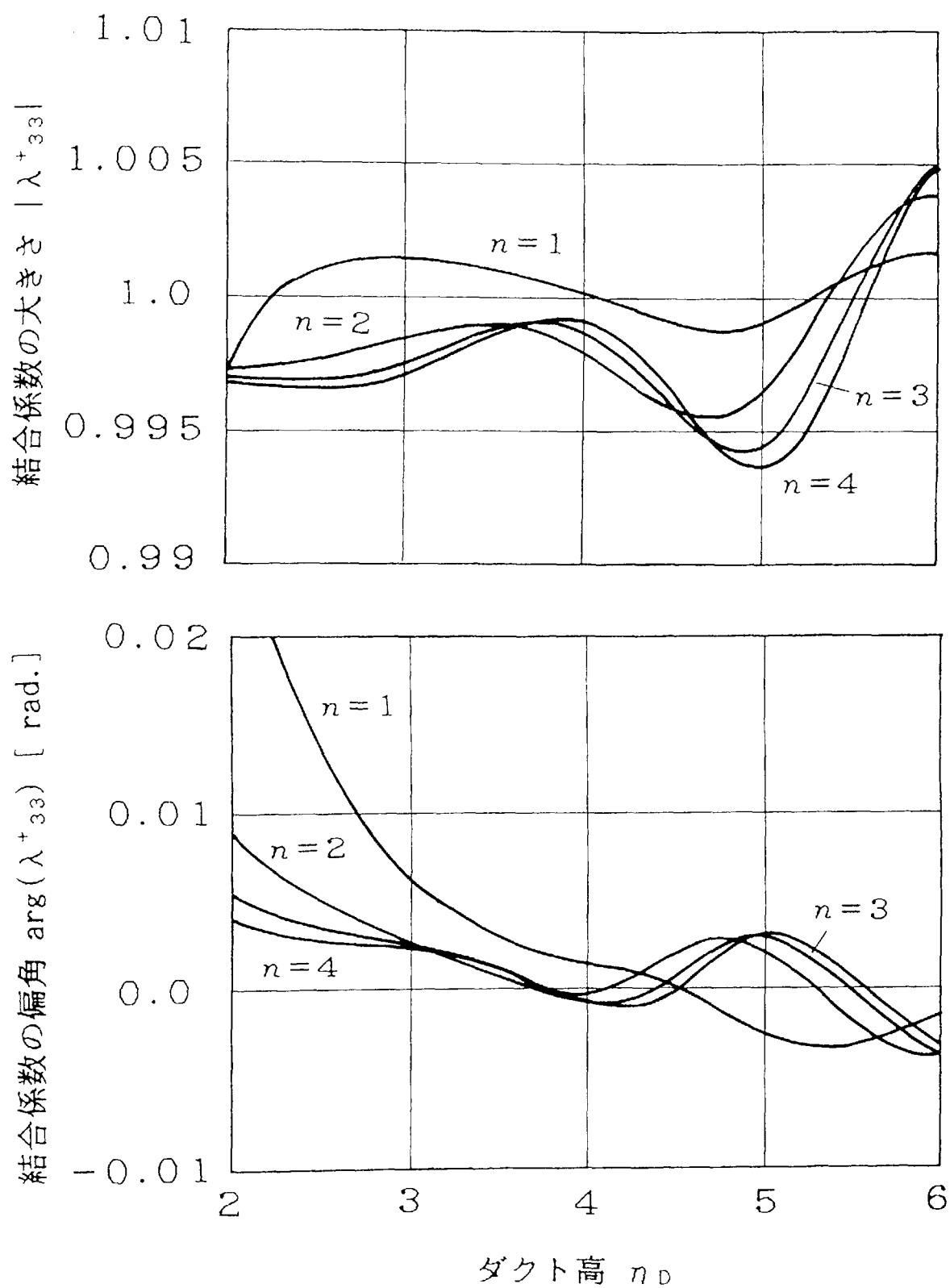


図3-35 ダクト高に対する結合係数  $\lambda^+_{33}$  の変動特性  
ただし,  $n_s=2$ ,  $\alpha^3=-1$  (垂直偏波)

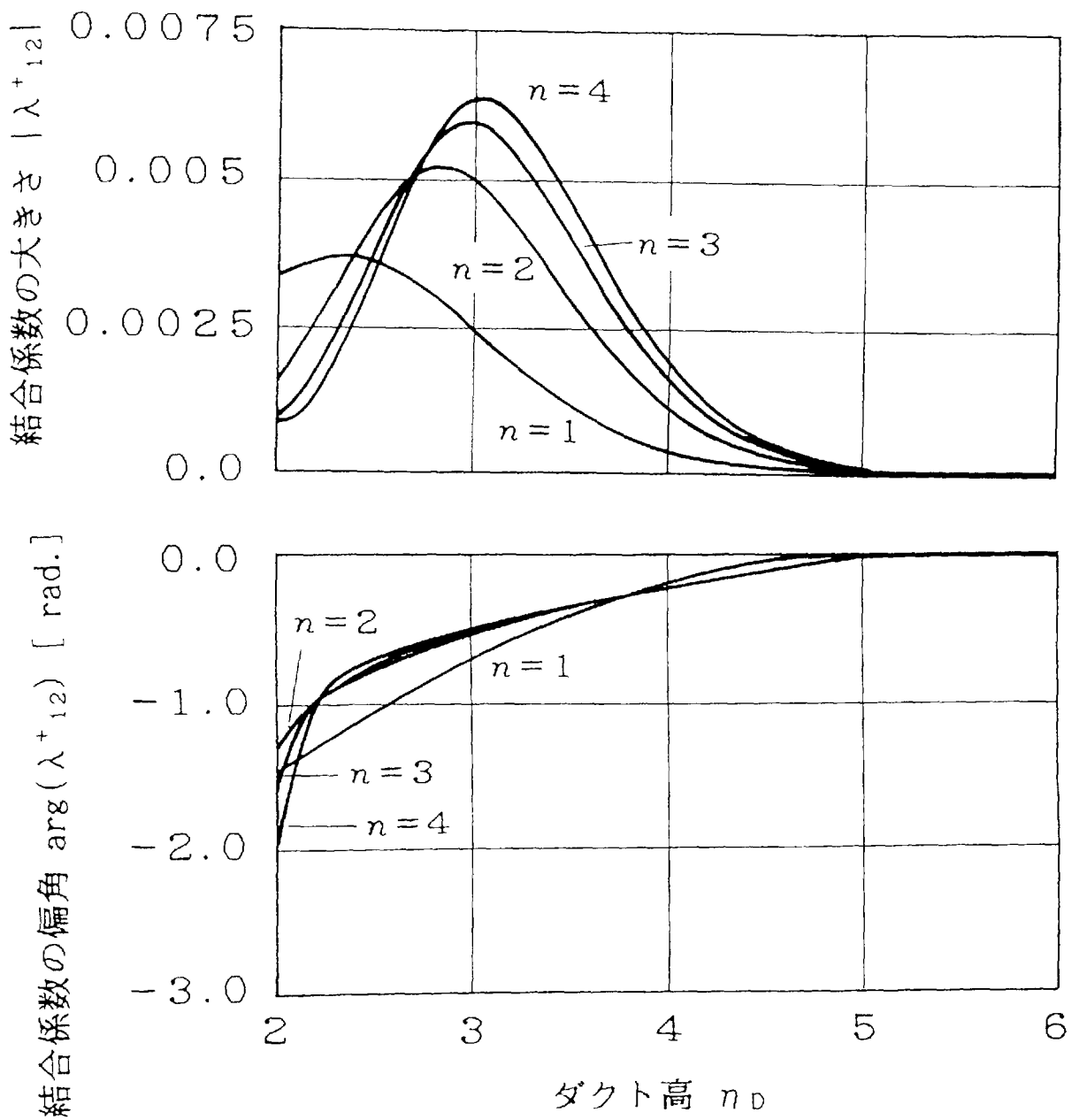


図3-36 ダクト高に対する結合係数  $\lambda^+_{12}$  の変動特性  
ただし,  $n_s=2$ ,  $\alpha^3=-1$  (垂直偏波)

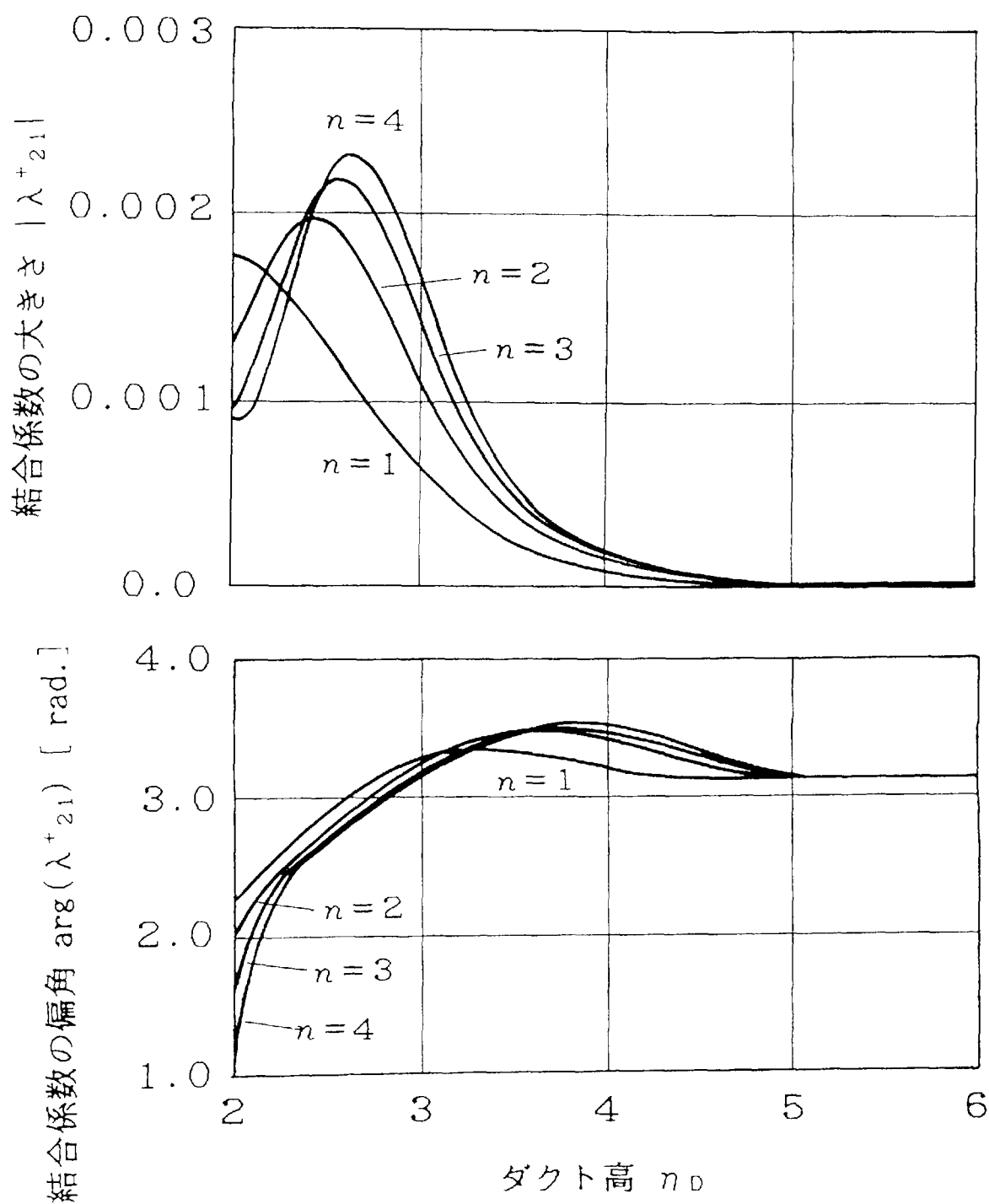


図3-37 ダクト高に対する結合係数 $\lambda_{21}^+$ の変動特性  
ただし,  $n_s=2$ ,  $\alpha^3=-1$  (垂直偏波)

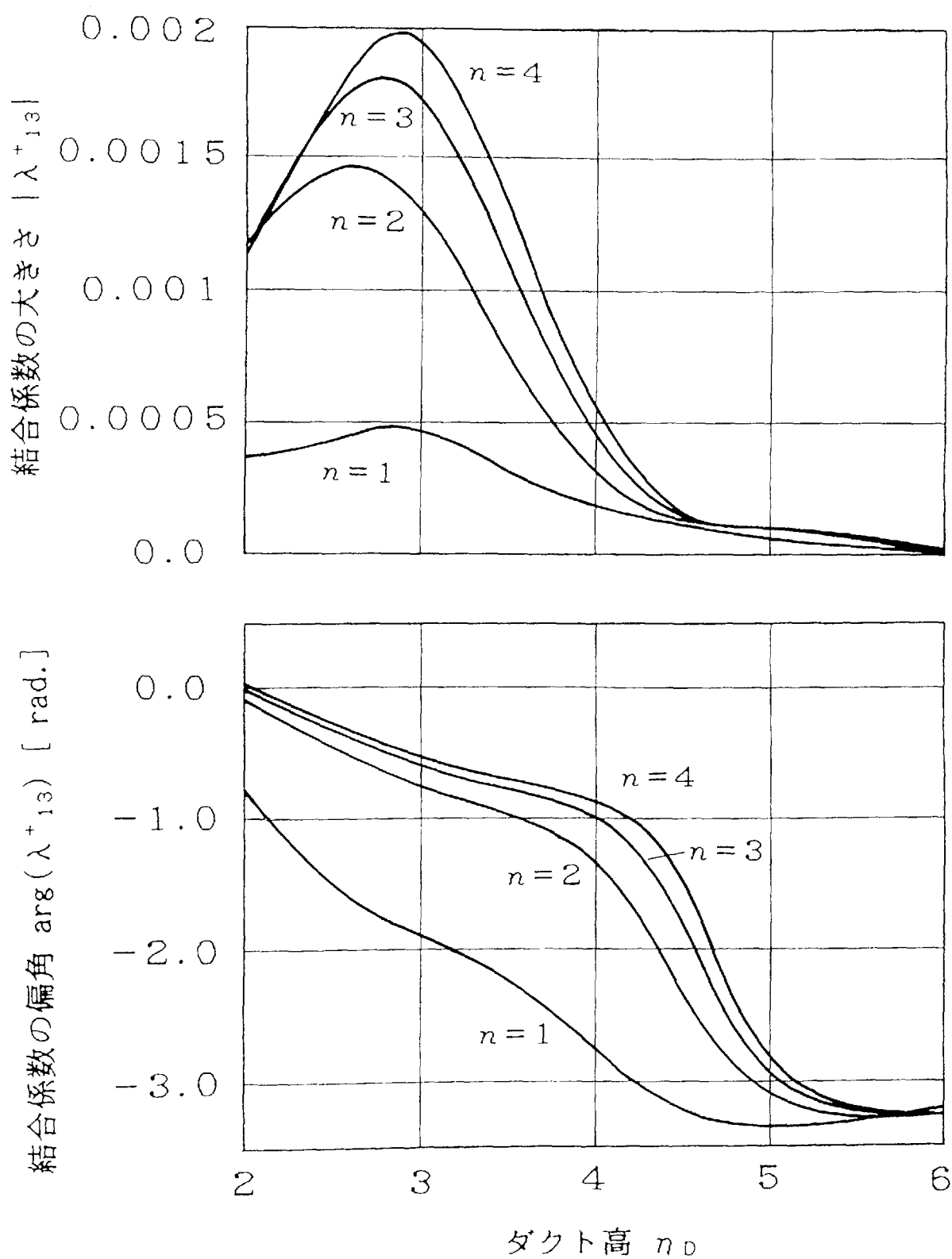


図3-38 ダクト高に対する結合係数 $\lambda^+_{13}$ の変動特性  
ただし,  $n_s=2$ ,  $\alpha^3=-1$  (垂直偏波)

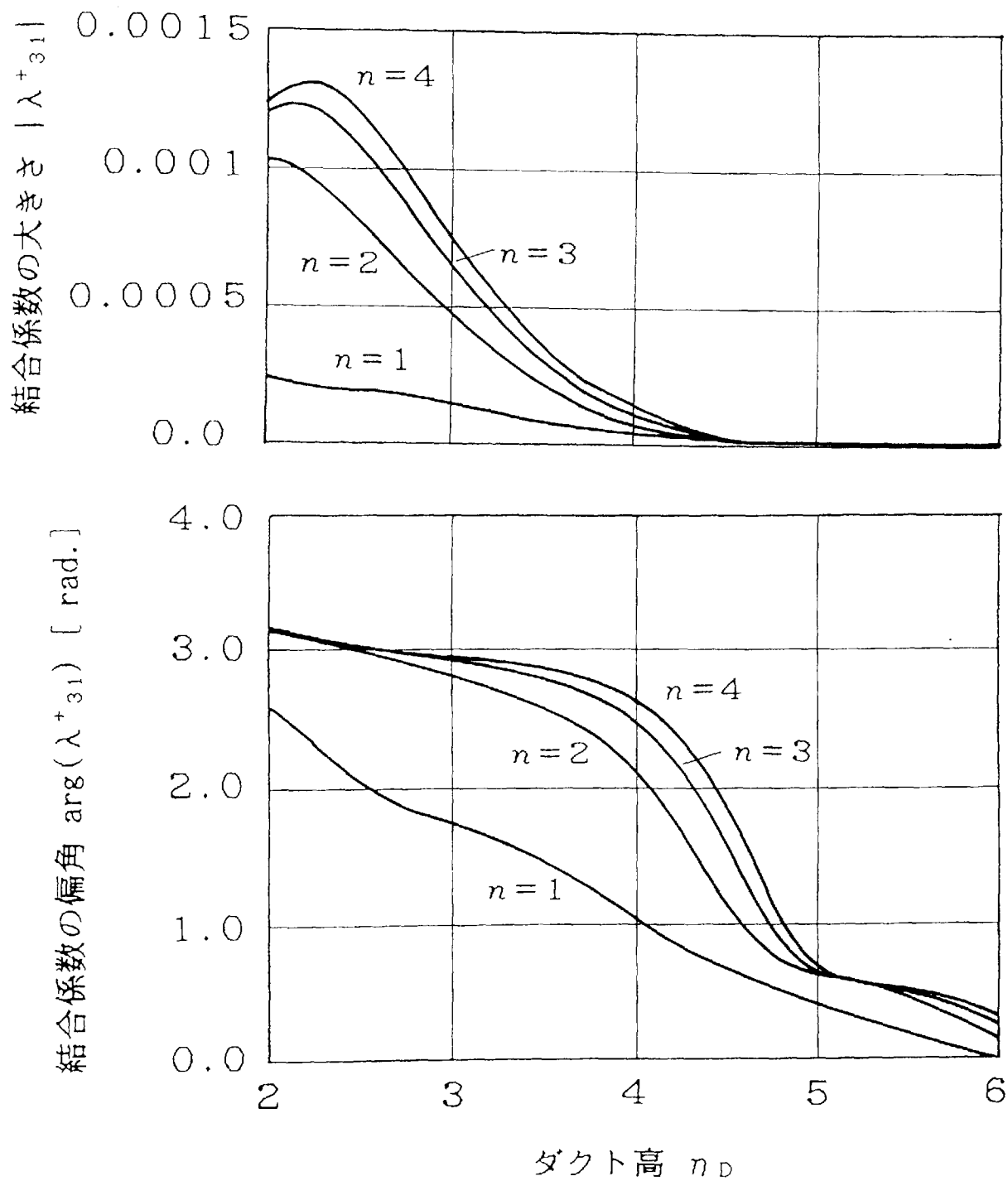


図3-39 ダクト高に対する結合係数 $\lambda^+_{31}$ の変動特性  
ただし,  $n_s=2$ ,  $\alpha^3=-1$  (垂直偏波)

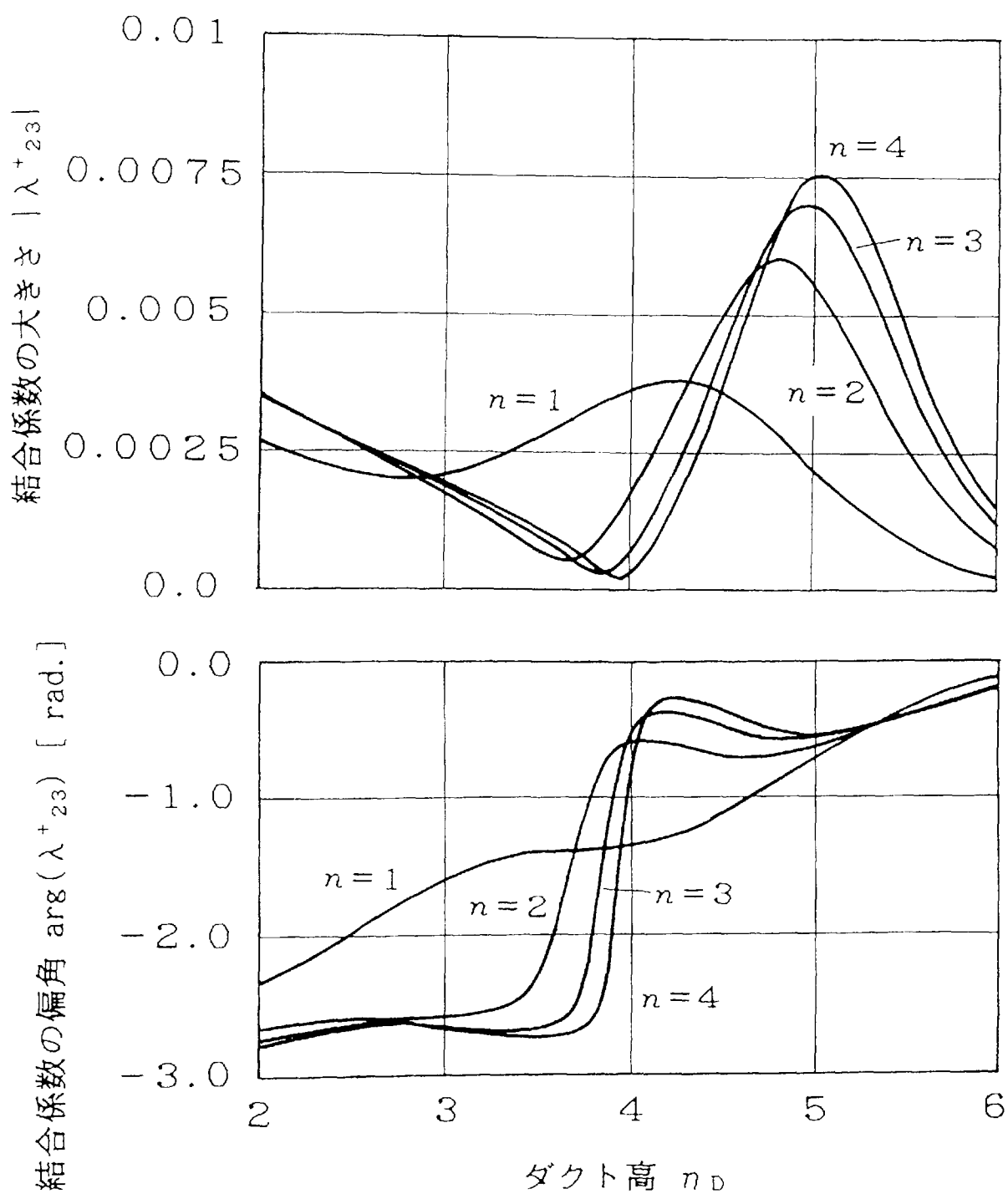


図3-40 ダクト高に対する結合係数 $\lambda_{23}^+$ の変動特性

ただし,  $n_s=2$ ,  $\alpha^3=-1$  (垂直偏波)

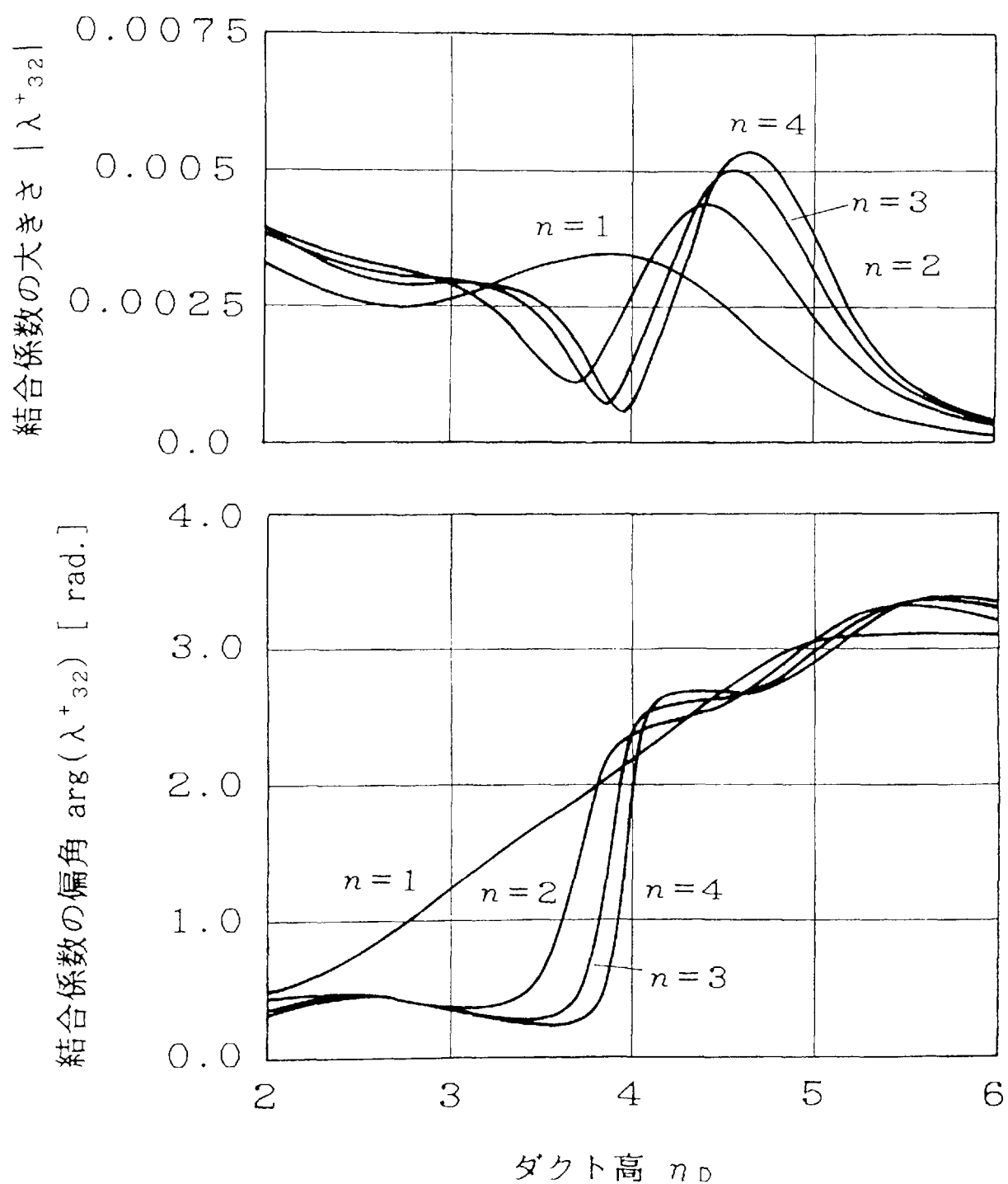


図3-41 ダクト高に対する結合係数  $\lambda^+_{32}$  の変動特性  
ただし,  $n_s=2$ ,  $\alpha^3=-1$  (垂直偏波)

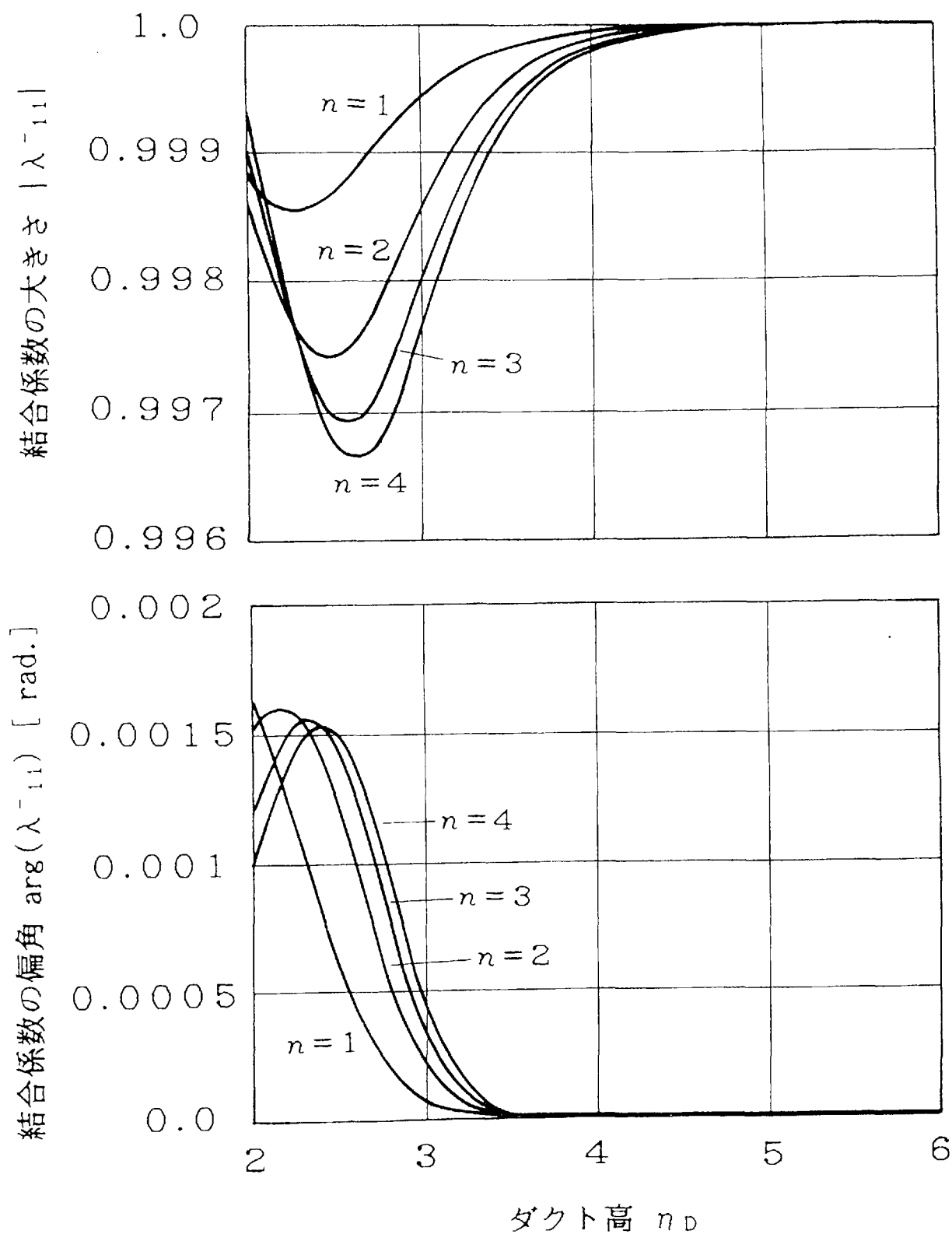


図3-42 ダクト高に対する結合係数 $\lambda^{-1}_{11}$ の変動特性

ただし,  $n_s=2$ ,  $\alpha^3=-1$  (垂直偏波)



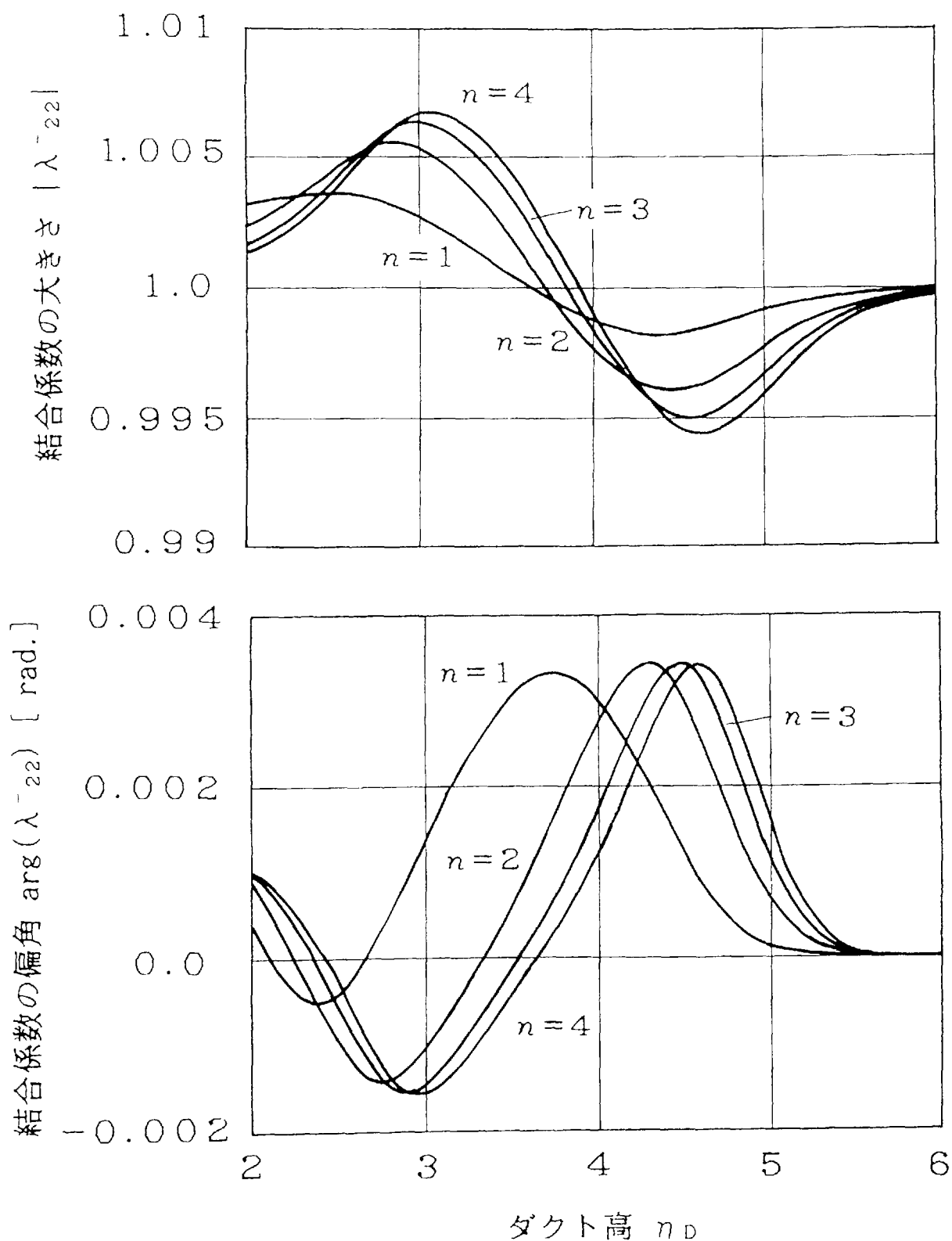


図3-43 ダクト高に対する結合係数 $\lambda^{-22}$ の変動特性  
ただし,  $n_s=2$ ,  $\alpha^3=-1$  (垂直偏波)

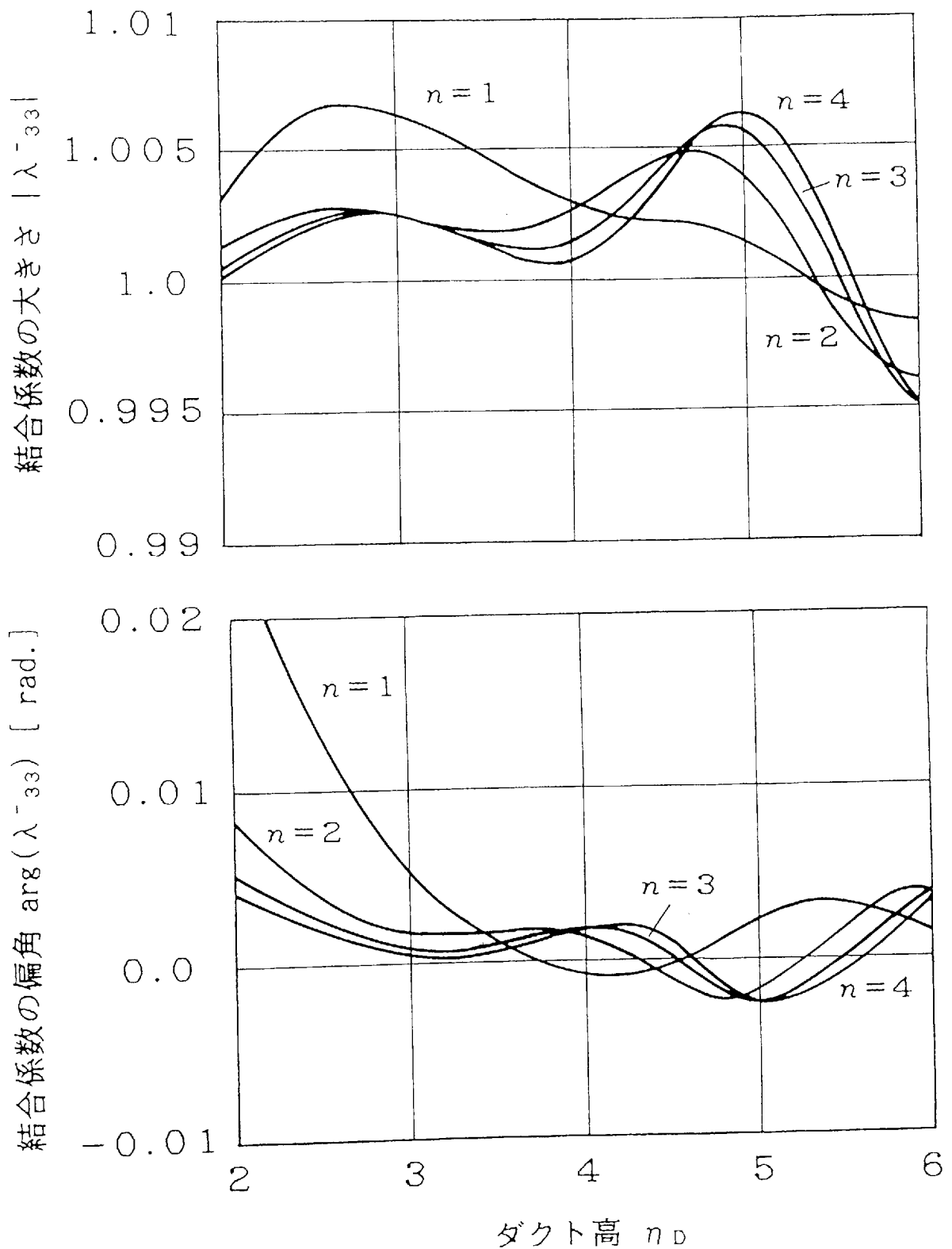


図3-44 ダクト高に対する結合係数 $\lambda^{-33}$ の変動特性  
ただし,  $n_s=2$ ,  $\alpha^3=-1$  (垂直偏波)

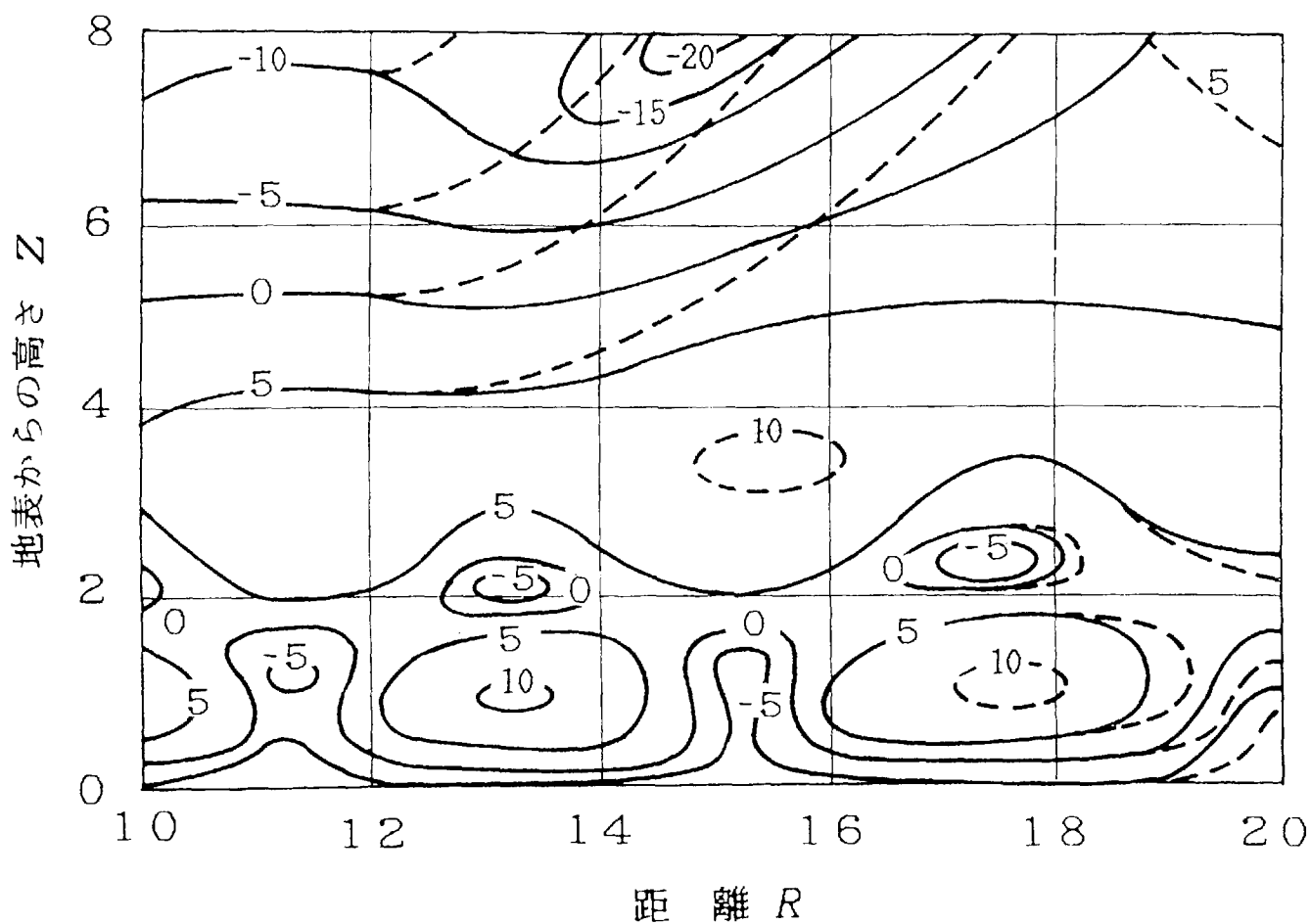


図3-45 水平方向に減少する2乗Nプロファイルダクト内での  
相対電界強度の空間分布（水平偏波）

ただし，実線は等レベル線（数値はデシベル値）

破線は  $\lambda_{11} = 1, \lambda_{12} = 0$  の場合

$\eta_s = \eta_d = 3, l = 3 \sim 1.8$ , 送信高  $Z_t = 3$

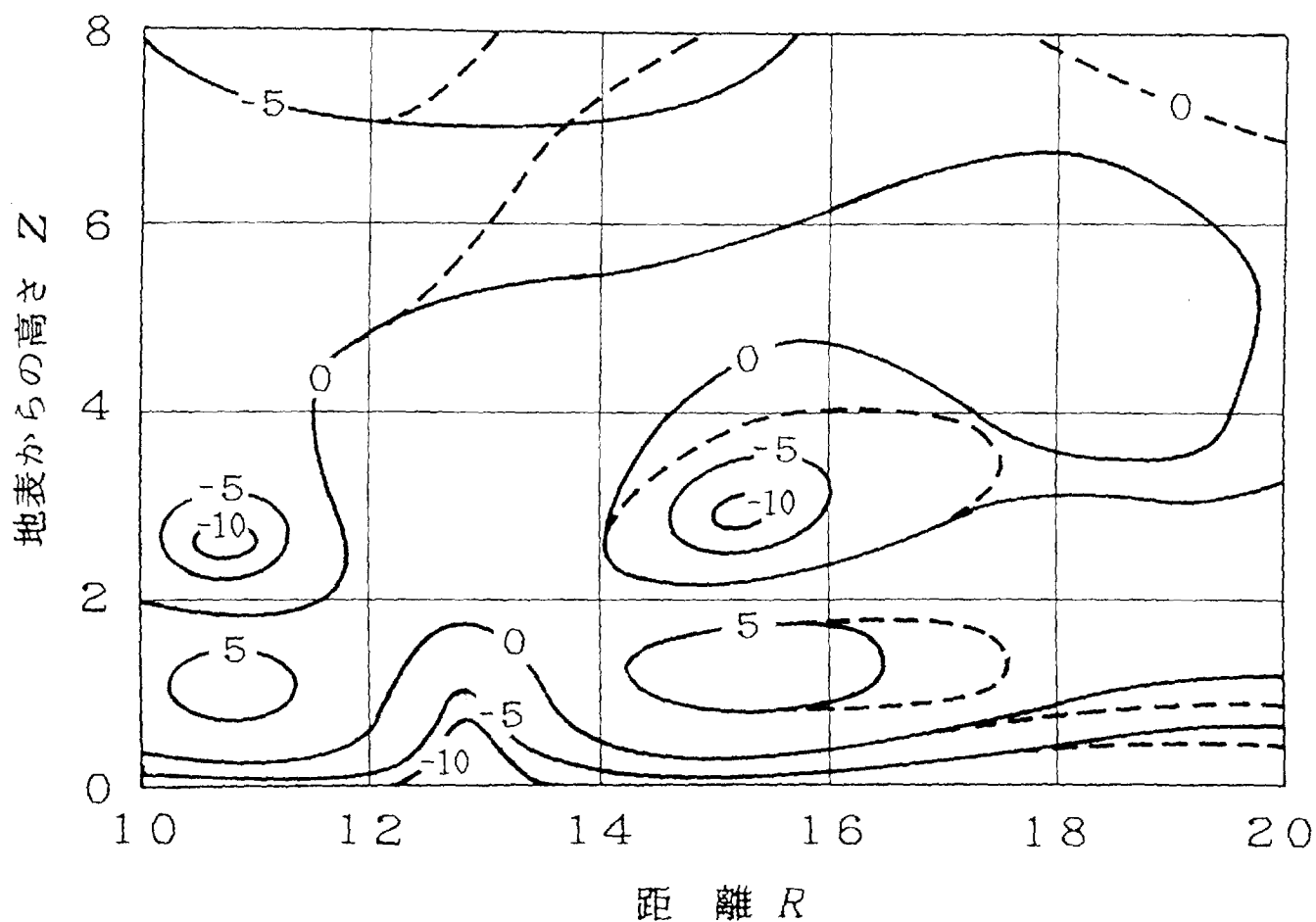


図3-46 水平方向に減少する4乗Nプロファイルダクト内での  
相対電界強度の空間分布（水平偏波）

ただし，実線は等レベル線（数値はデシベル値）

破線は $\lambda_{11} = 1, \lambda_{13} = 0$ の場合

$\eta_s = \eta_d = 3, l = 3 \sim 1.8$ , 送信高  $Z_t = 3$

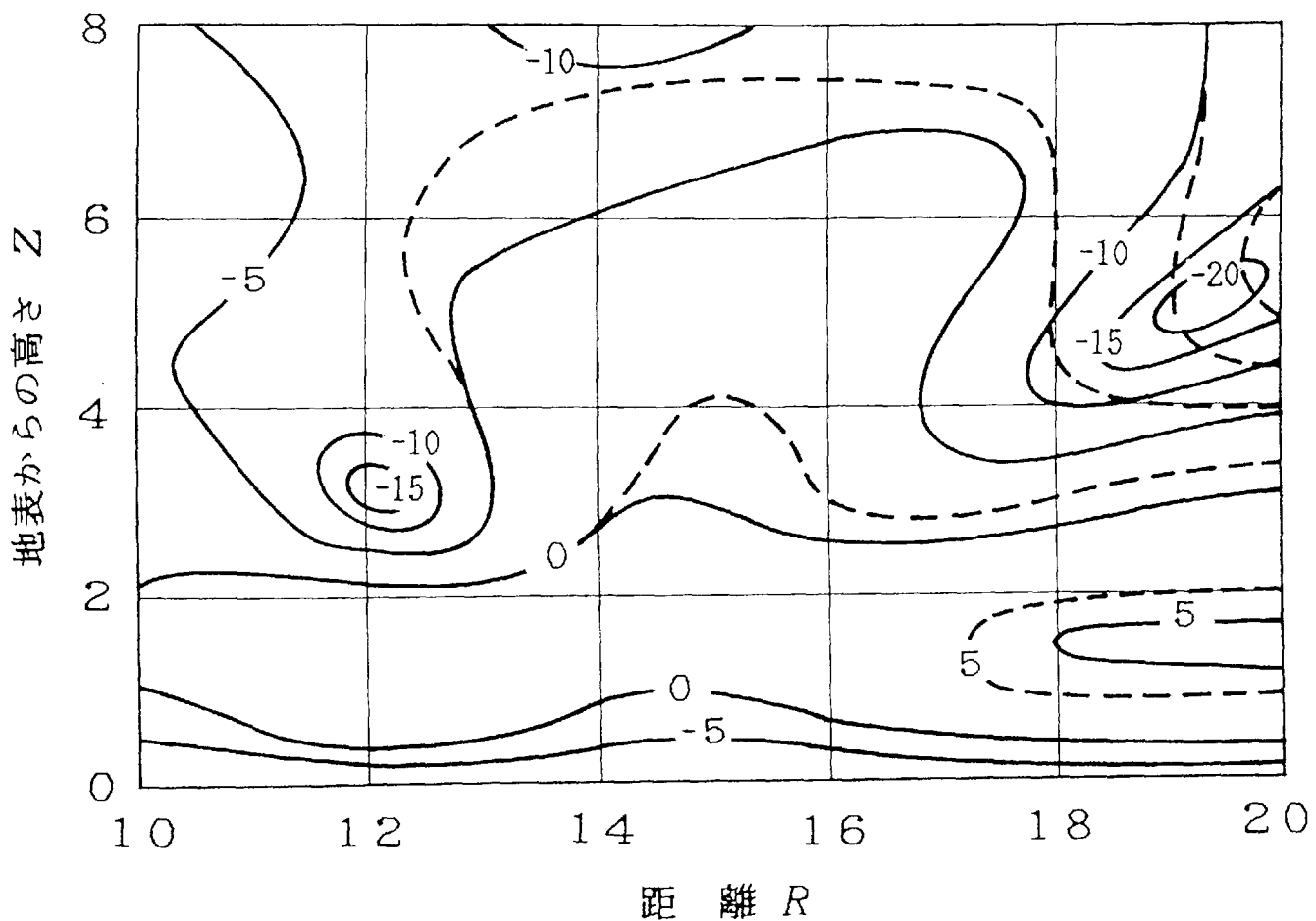


図3-47 水平方向に減少する6乗Nプロファイルダクト内での  
相対電界強度の空間分布（水平偏波）

ただし，実線は等レベル線（数値はデシベル値）

破線は  $\lambda_{11} = 1, \lambda_{13} = 0$  の場合

$\eta_s = \eta_d = 3, l = 3 \sim 1.8$ ，送信高  $Z_t = 3$

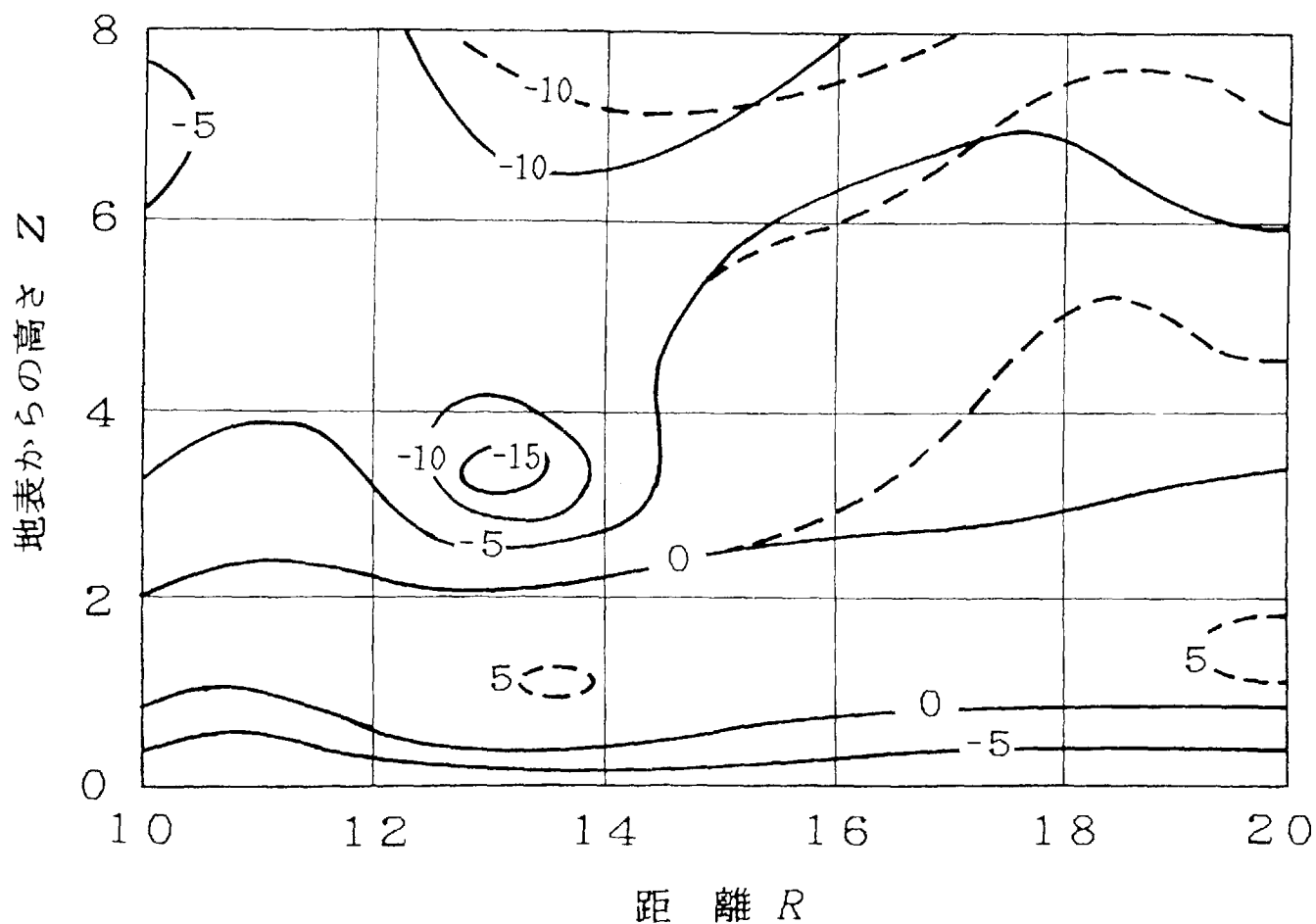


図3-48 水平方向に減少する8乗Nプロファイルダクト内での  
相対電界強度の空間分布（水平偏波）

ただし，実線は等レベル線（数値はデシベル値）

破線は  $\lambda_{ii} = 1, \lambda_{ij} = 0$  の場合

$\eta_s = \eta_d = 3, l = 3 \sim 1.8$ , 送信高  $Z_t = 3$

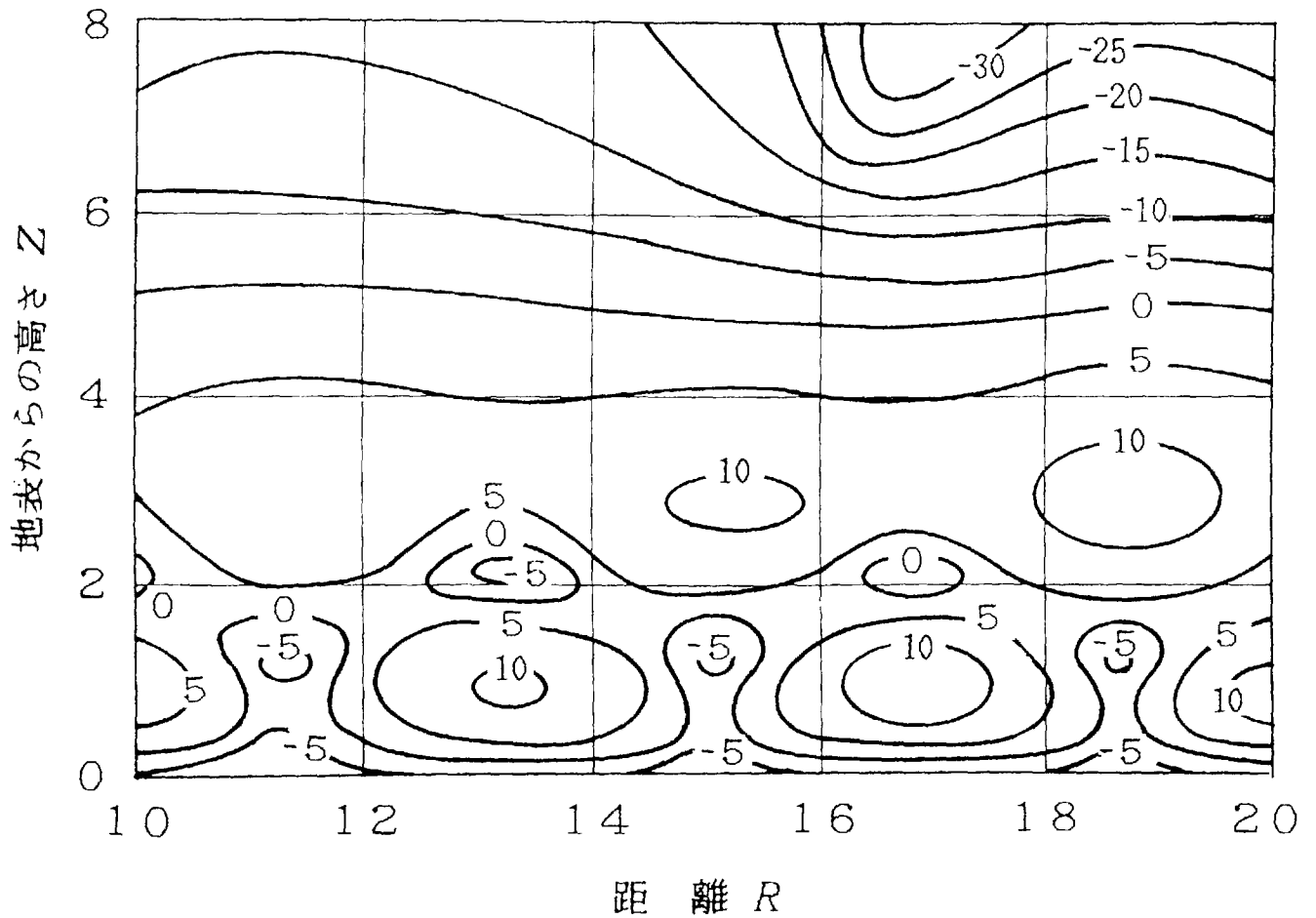


図3-49 水平方向に増大する2乗Nプロファイルダクト内での  
相対電界強度の空間分布（水平偏波）

ただし，実線は等レベル線（数値はデシベル値）

$\eta_s = \eta_d = 3$ ， $l = 3 \sim 4.2$ ，送信高  $Z_t = 3$

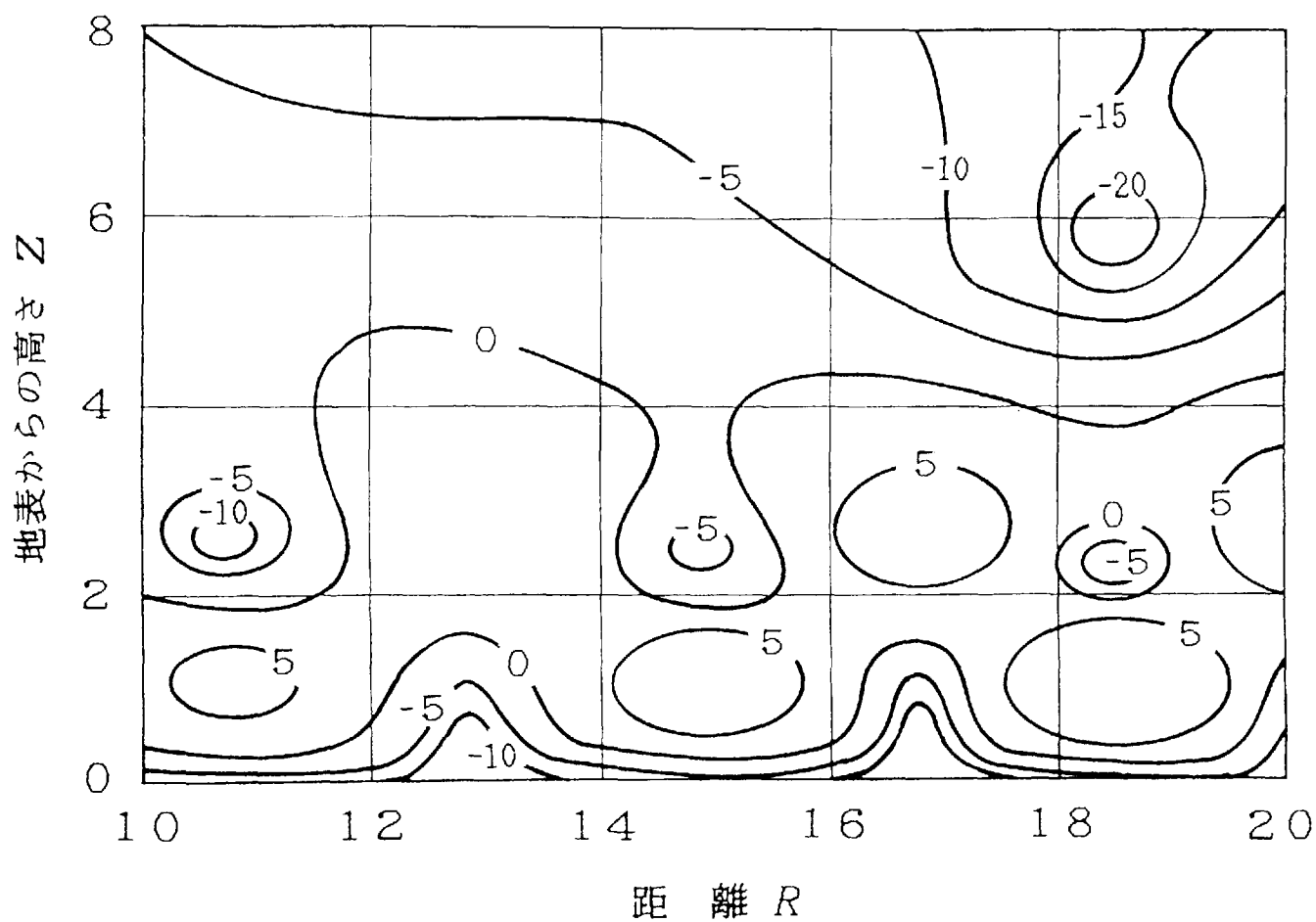


図3-50 水平方向に増大する4乗Nプロファイルダクト内での  
相対電界強度の空間分布（水平偏波）

ただし，実線は等レベル線（数値はデシベル値）

$\eta_s = \eta_d = 3$ ， $l = 3 \sim 4.2$ ，送信高  $Z_t = 3$



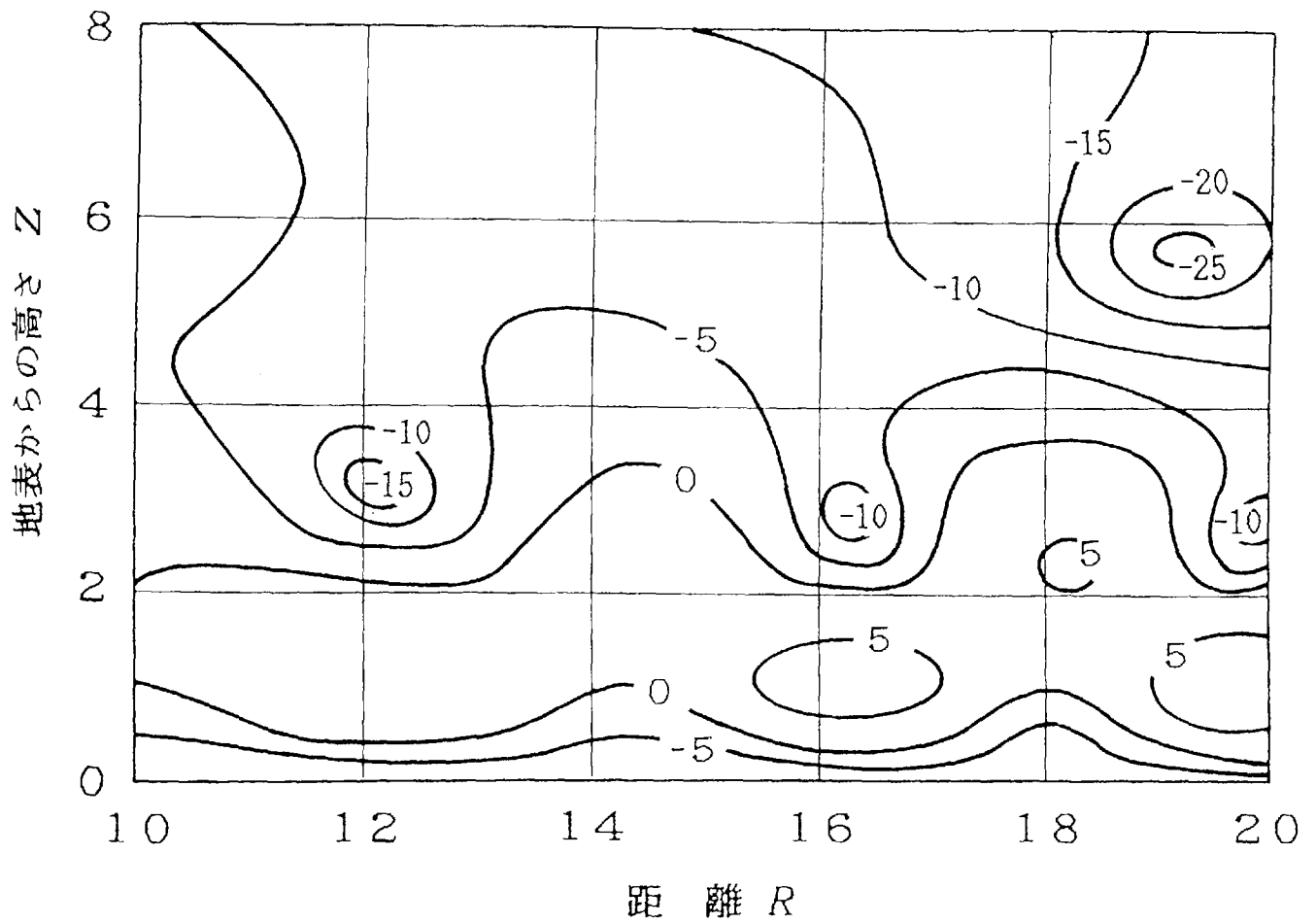


図3-5 1 水平方向に増大する6乗Nプロファイルダクト内での  
 相対電界強度の空間分布（水平偏波）

ただし，実線は等レベル線（数値はデシベル値）

$\eta_s = \eta_d = 3$ ， $l = 3 \sim 4.2$ ，送信高  $Z_t = 3$

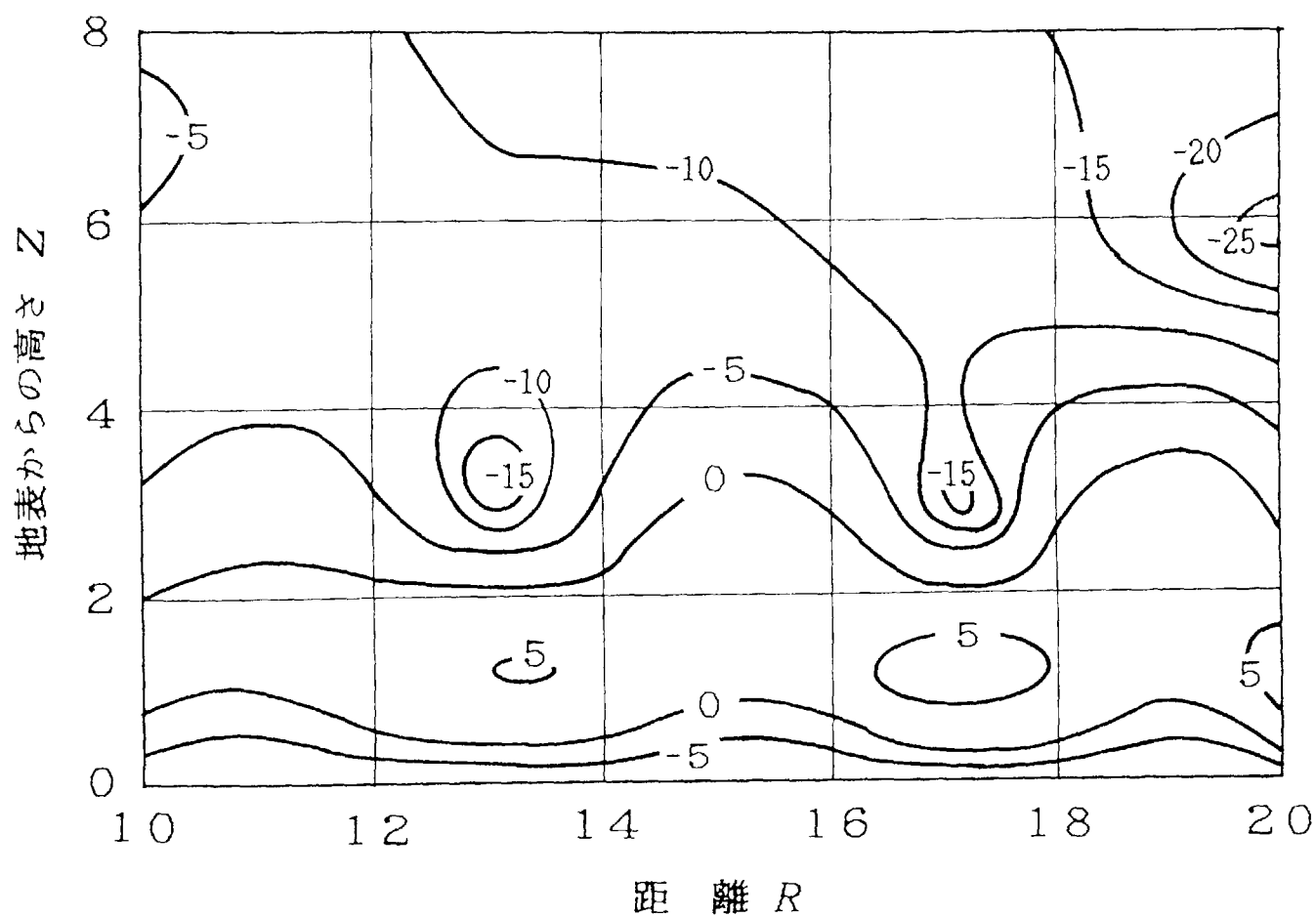


図3-52 水平方向に増大する8乗Nプロファイルダクト内での  
 相対電界強度の空間分布（水平偏波）

ただし，実線は等レベル線（数値はデシベル値）

$n_s = n_d = 3$ ， $l = 3 \sim 4.2$ ，送信高  $Z_t = 3$

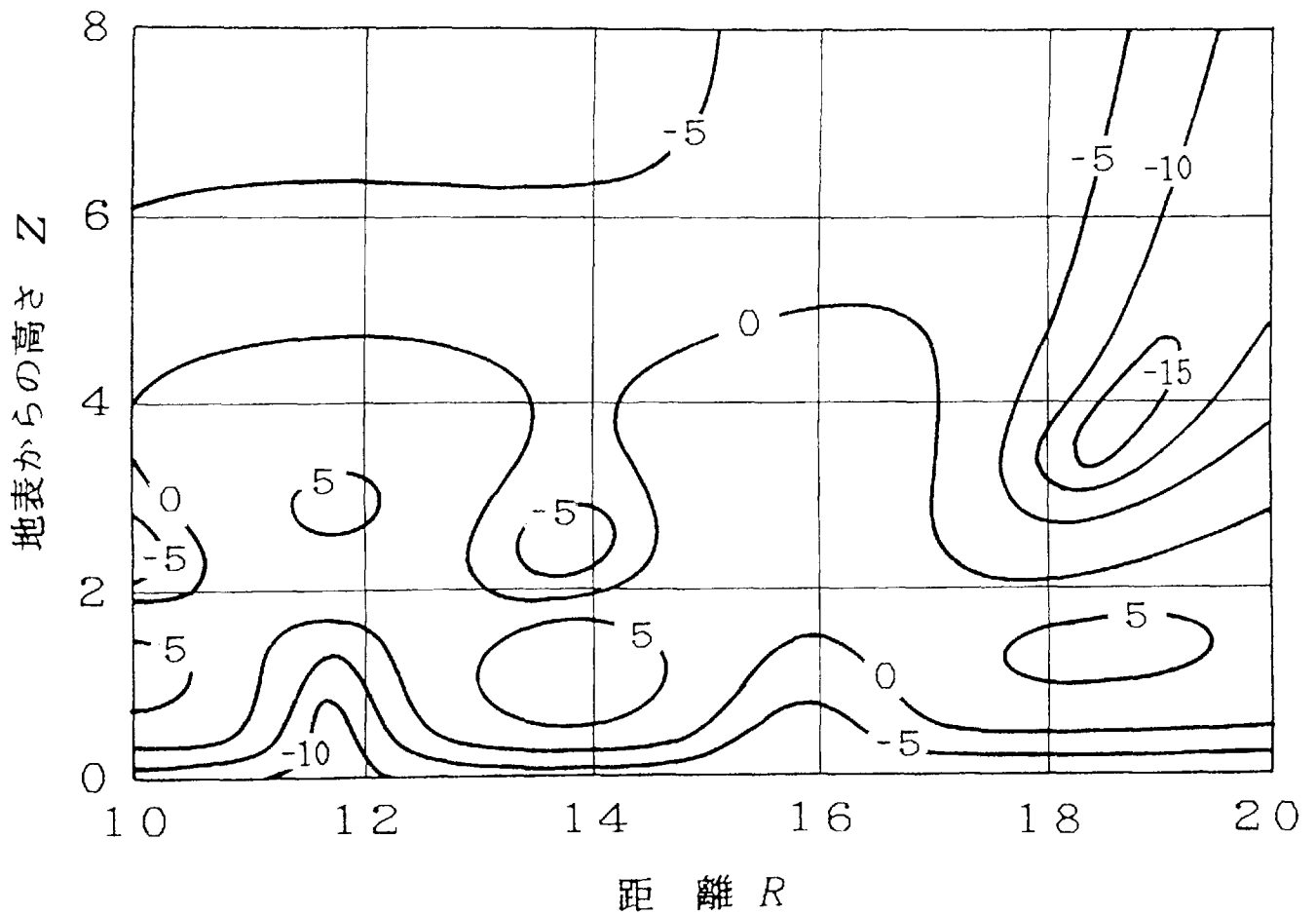


図3-53 水平方向に減少する2乗Nプロファイルダクト内での  
 相対電界強度の空間分布（水平偏波）

ただし、実線は等レベル線（数値はデシベル値）

$\eta_s = \eta_d = 2$ ， $l = 3 \sim 1.8$ ，送信高  $Z_t = 3$

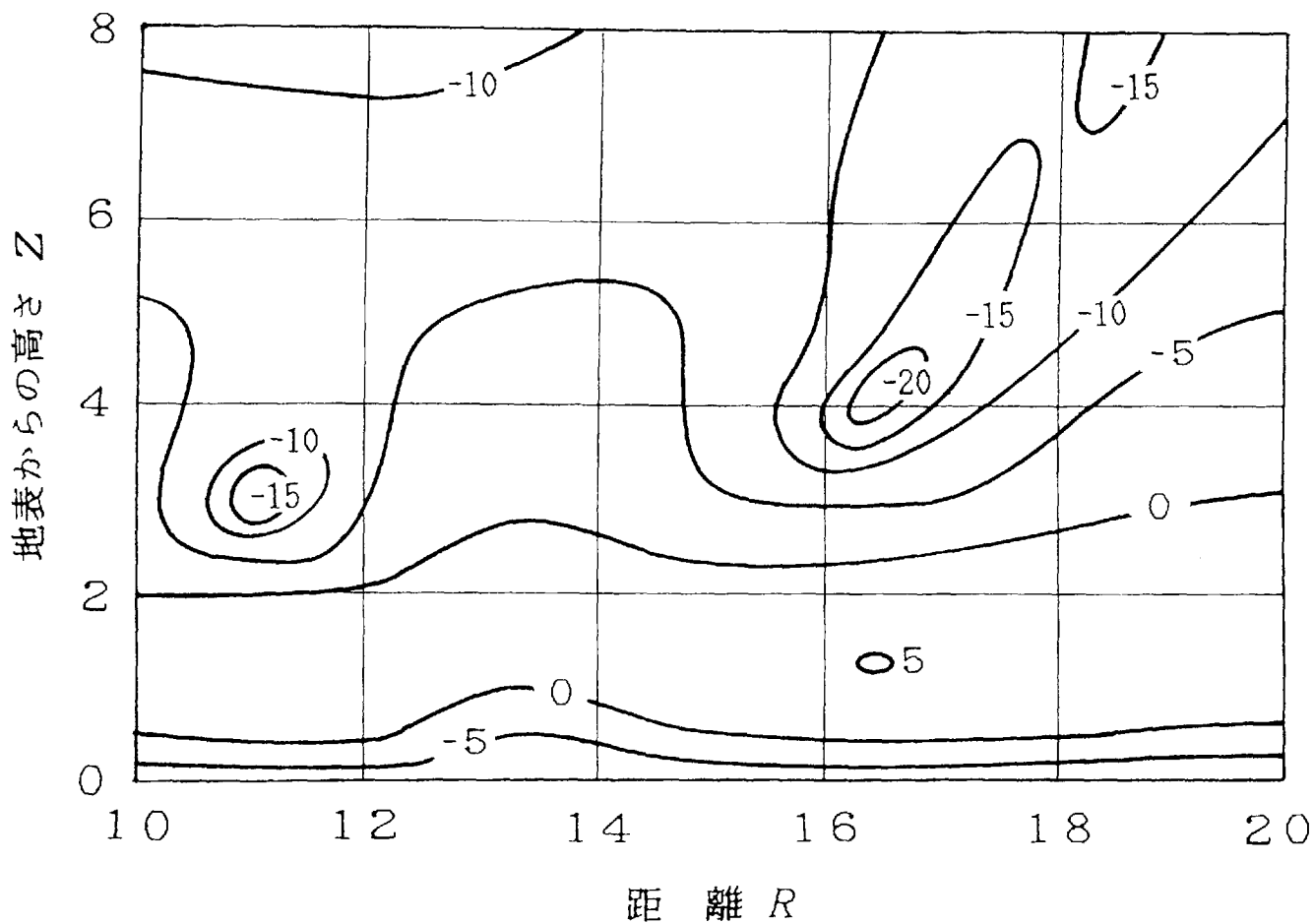


図3-54 水平方向に減少する4乗Nプロファイルダクト内での  
 相対電界強度の空間分布（水平偏波）

ただし、実線は等レベル線（数値はデシベル値）

$\eta_s = \eta_d = 2$ ,  $l = 3 \sim 1.8$ , 送信高  $Z_t = 3$

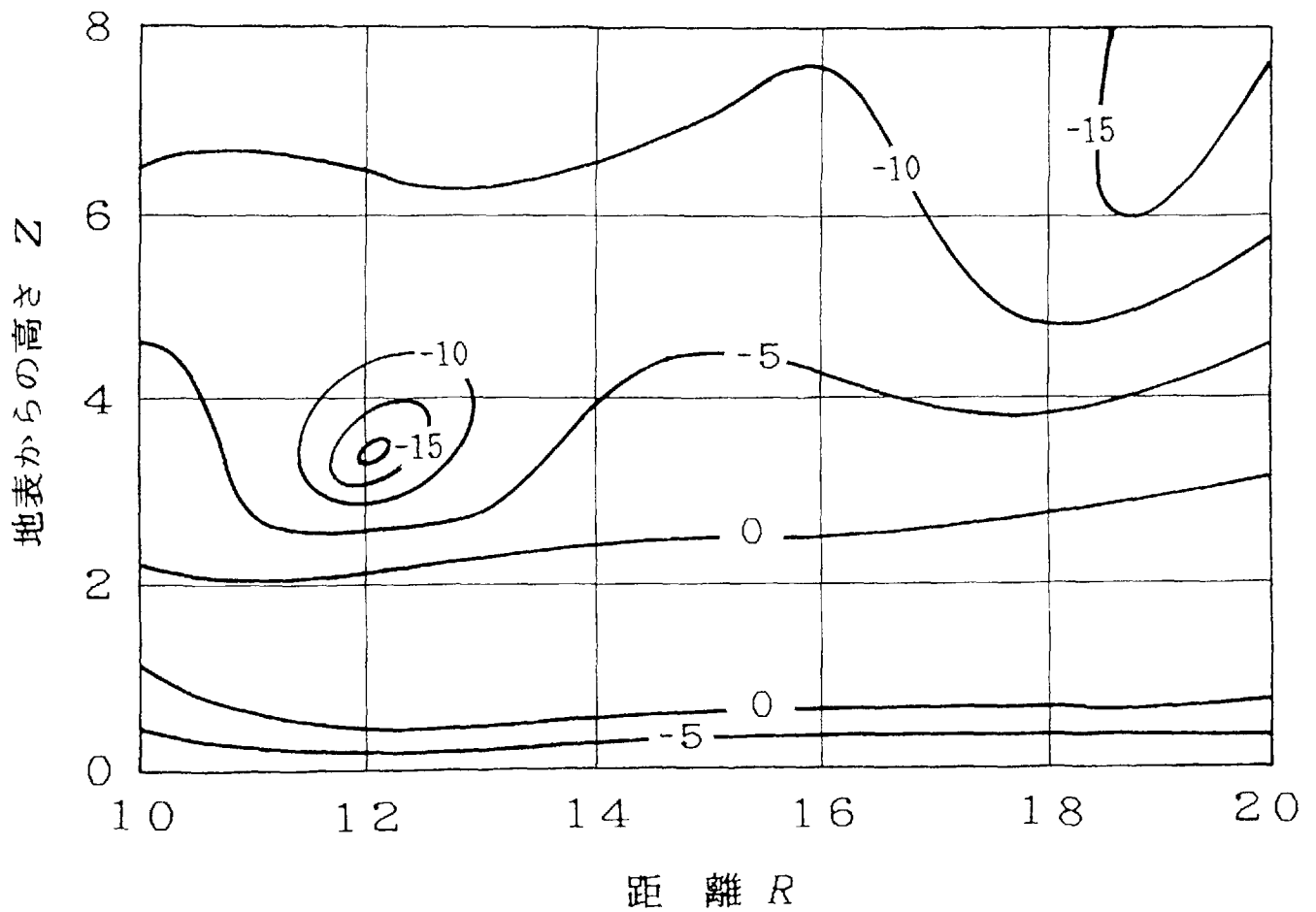


図3-55 水平方向に減少する6乗Nプロファイルダクト内での  
相対電界強度の空間分布（水平偏波）

ただし、実線は等レベル線（数値はデシベル値）

$$\eta_s = \eta_d = 2, \quad l = 3 \sim 1.8, \quad Z_t = 3$$

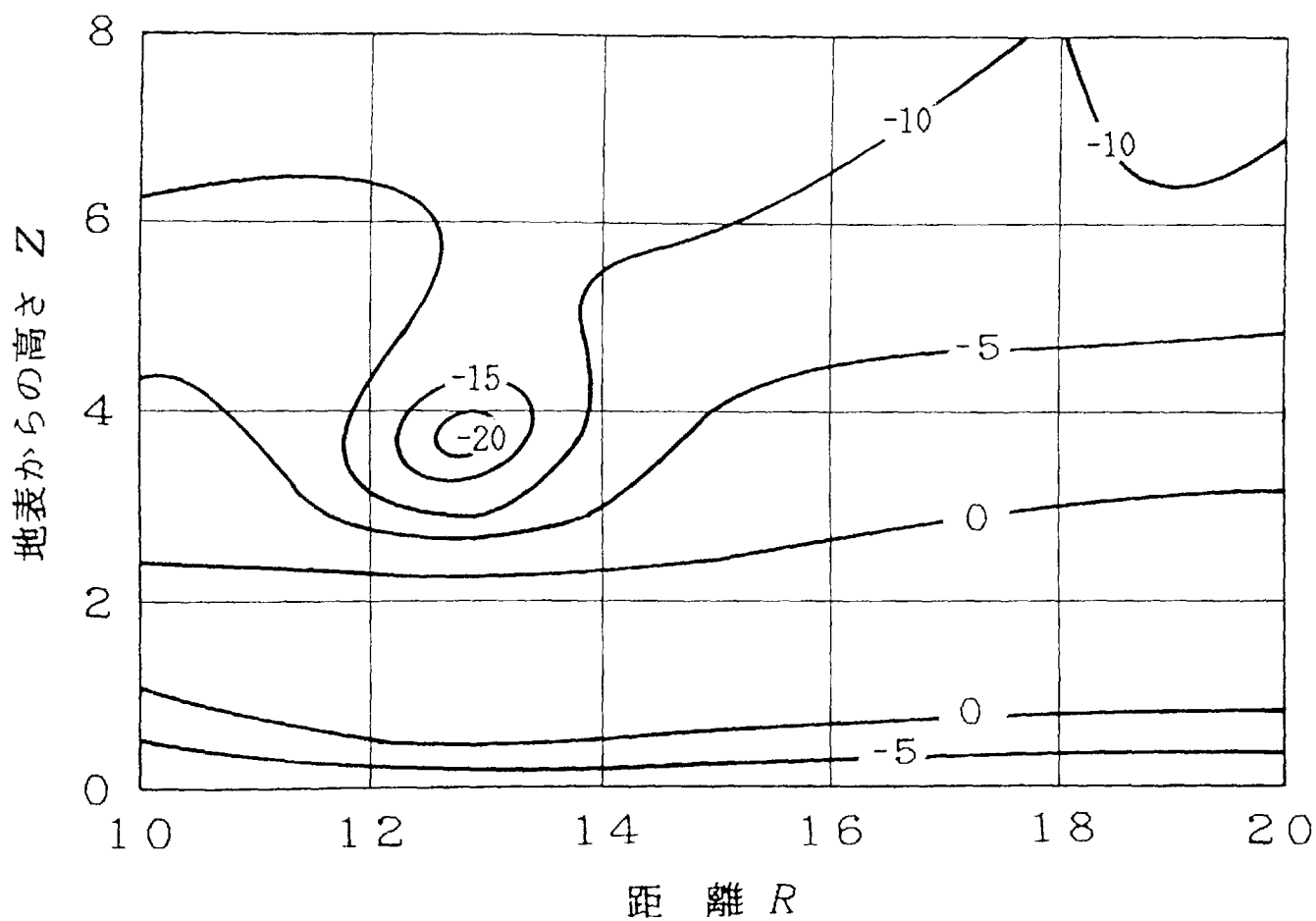


図3-56 水平方向に減少する8乗Nプロファイルダクト内での  
 相対電界強度の空間分布（水平偏波）

ただし，実線は等レベル線（数値はデシベル値）

$\eta_s = \eta_d = 2$ ， $l = 3 \sim 1.8$ ，送信高  $Z_t = 3$

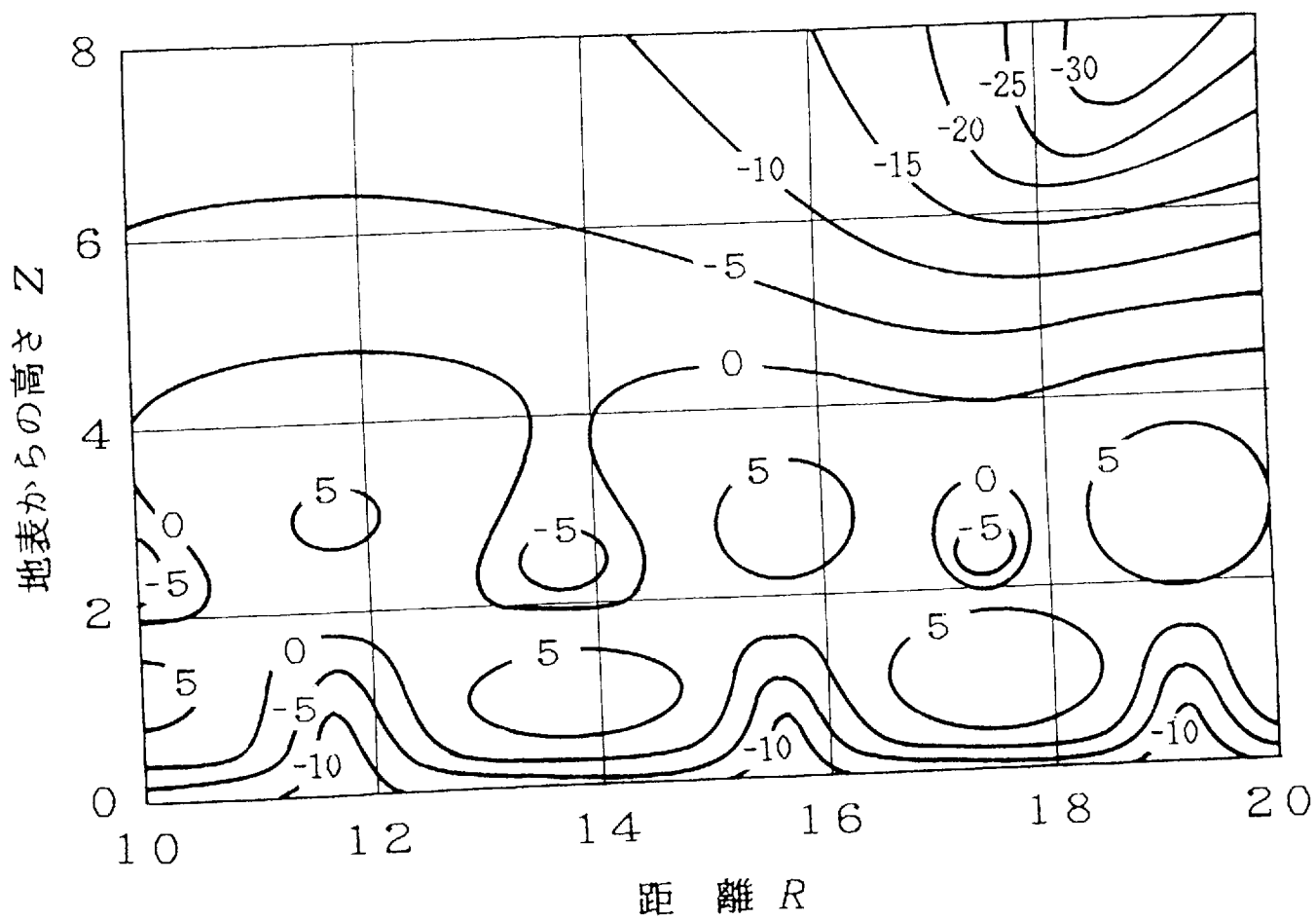


図3-57 水平方向に増大する2乗Nプロファイルダクト内での  
相対電界強度の空間分布（水平偏波）

ただし、実線は等レベル線（数値はデシベル値）  
 $n_s = n_d = 2$ ,  $l = 3 \sim 4.2$ , 送信高  $Z_t = 3$

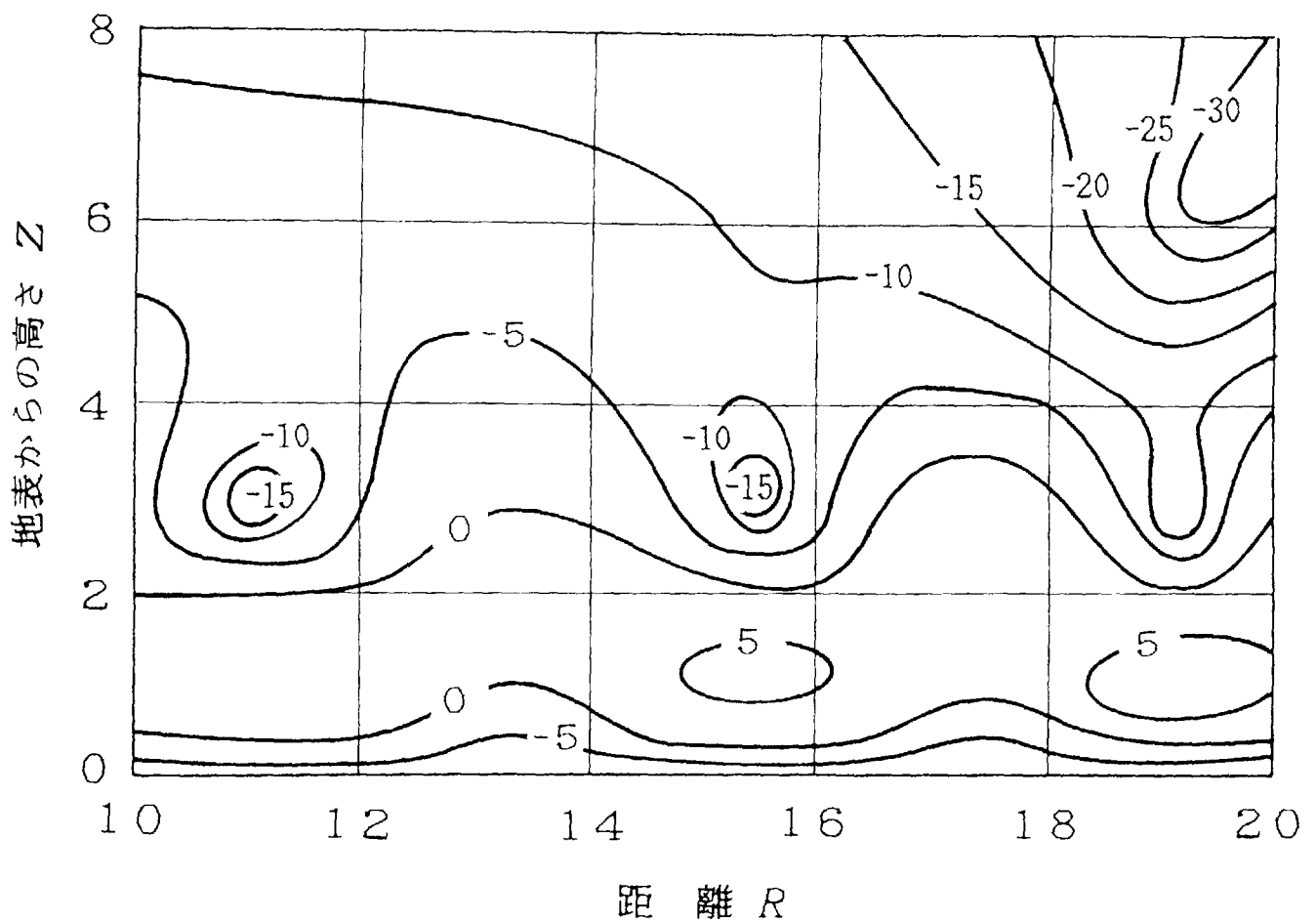


図3-58 水平方向に増大する4乗Nプロファイルダクト内での  
 相対電界強度の空間分布（水平偏波）

ただし，実線は等レベル線（数値はデシベル値）

$\eta_s = \eta_d = 2$ ， $l = 3 \sim 4.2$ ，送信高  $Z_t = 3$



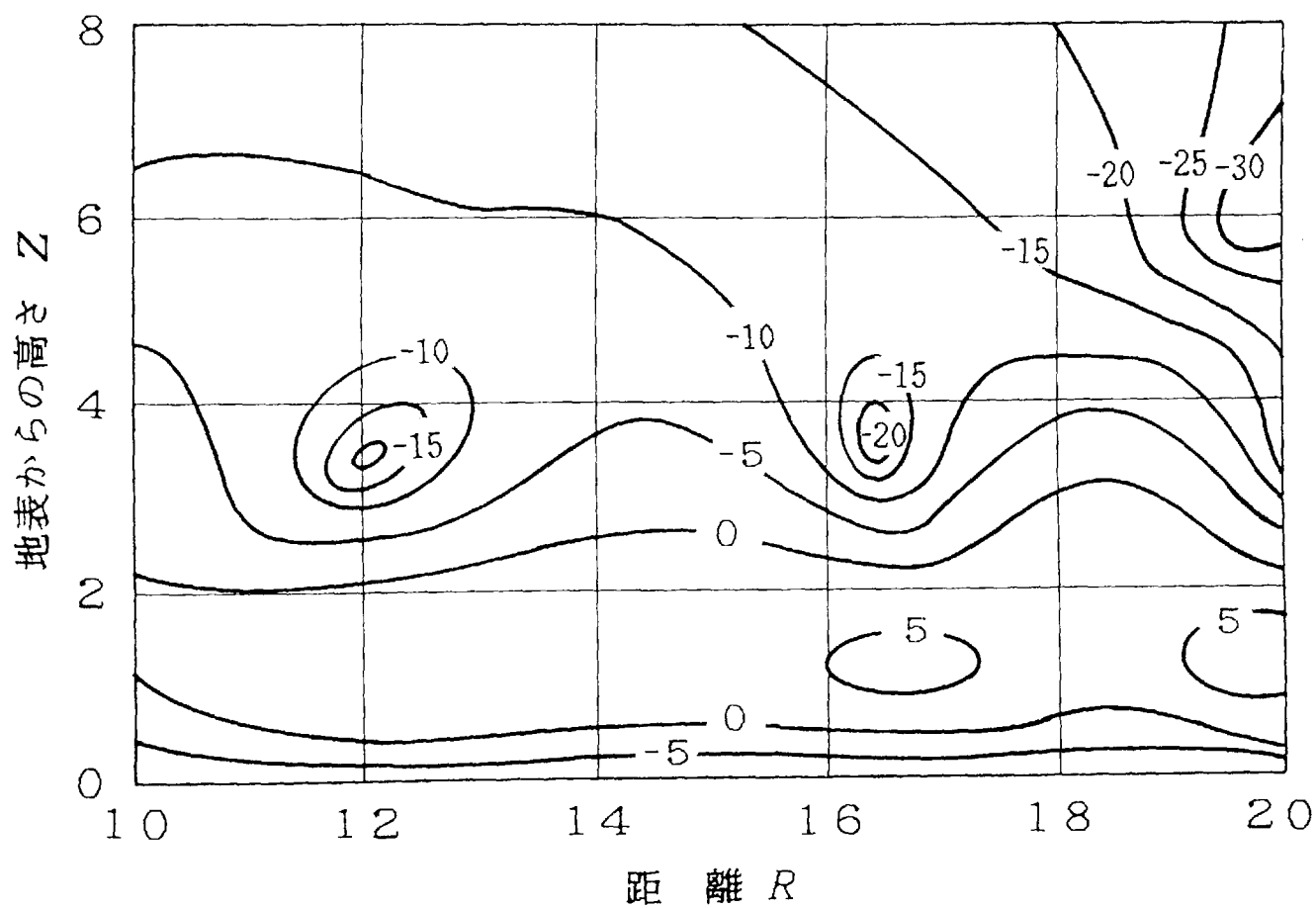


図3-59 水平方向に増大する6乗Nプロファイルダクト内での  
 相対電界強度の空間分布（水平偏波）

ただし，実線は等レベル線（数値はデシベル値）

$n_s = n_d = 2$ ， $l = 3 \sim 4.2$ ，送信高  $Z_t = 3$

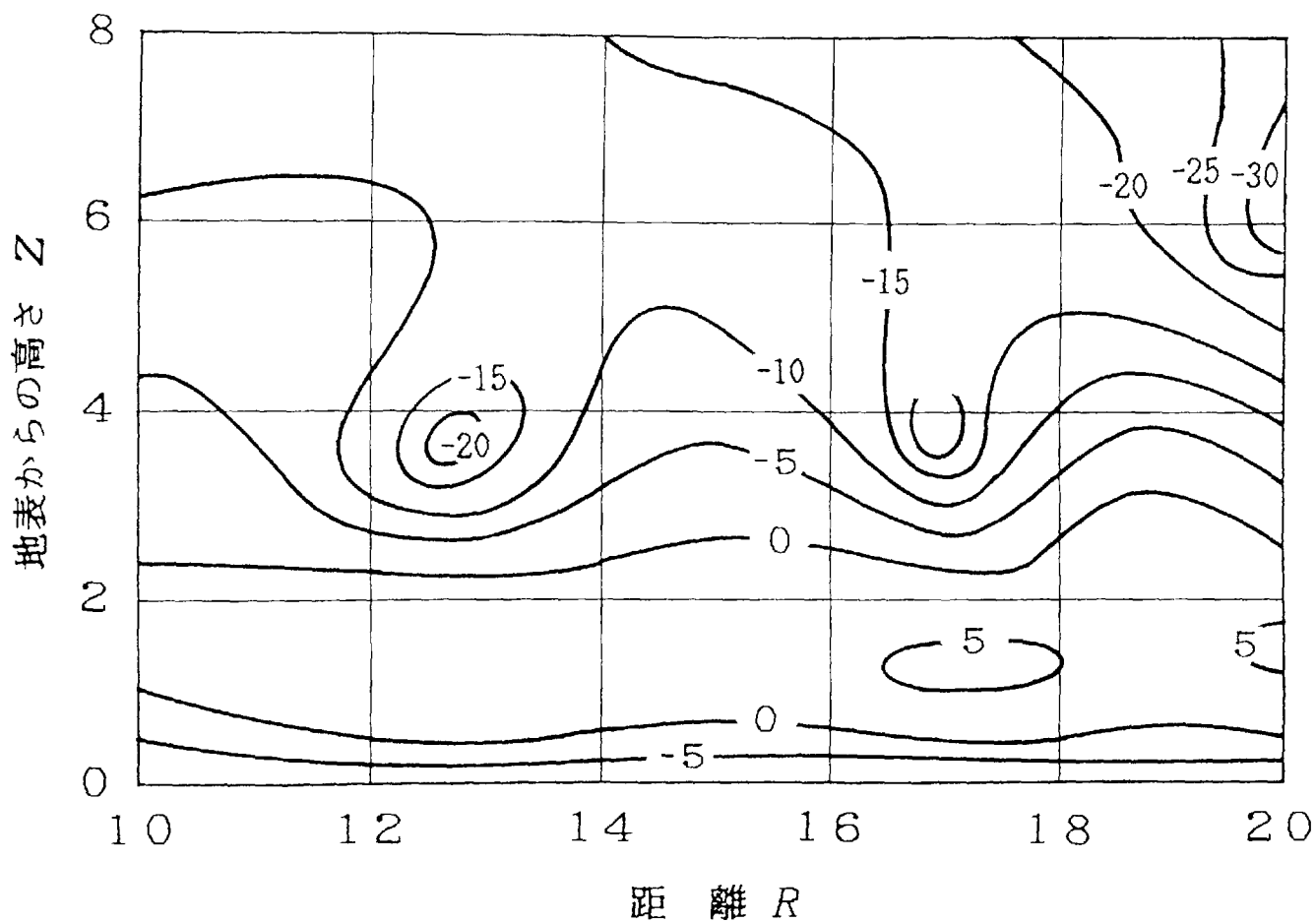


図3-60 水平方向に増大する8乗Nプロファイルダクト内での  
相対電界強度の空間分布（水平偏波）

ただし，実線は等レベル線（数値はデシベル値）

$\eta_s = \eta_d = 2$ ， $l = 3 \sim 4.2$ ，送信高  $Z_t = 3$

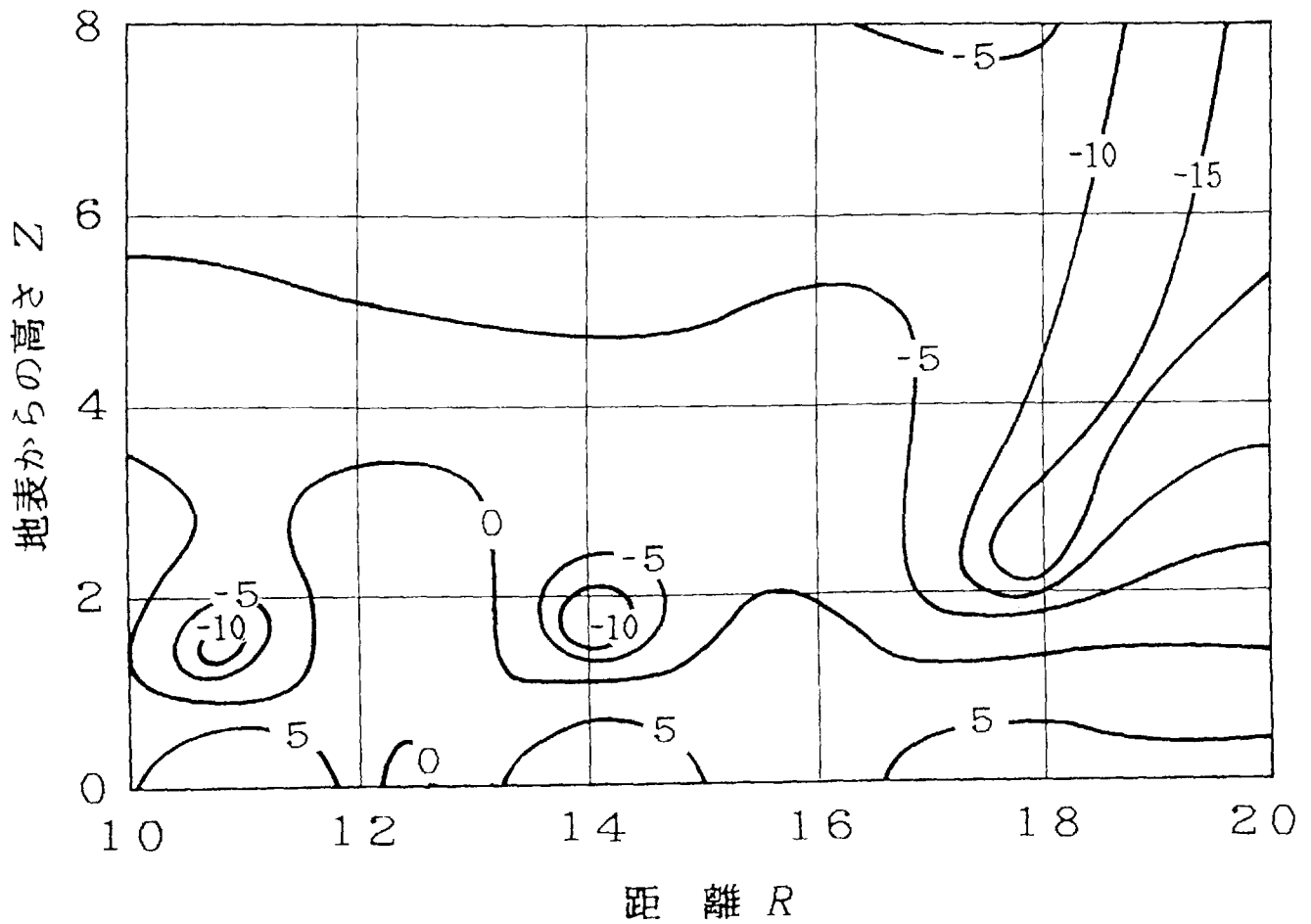


図3-61 水平方向に減少する2乗Nプロファイルダクト内での  
 相対電界強度の空間分布（垂直偏波）

ただし，実線は等レベル線（数値はデシベル値）

$\eta_s = \eta_d = 2$ ， $l = 2 \sim 0.8$ ，送信高  $Z_t = 2$

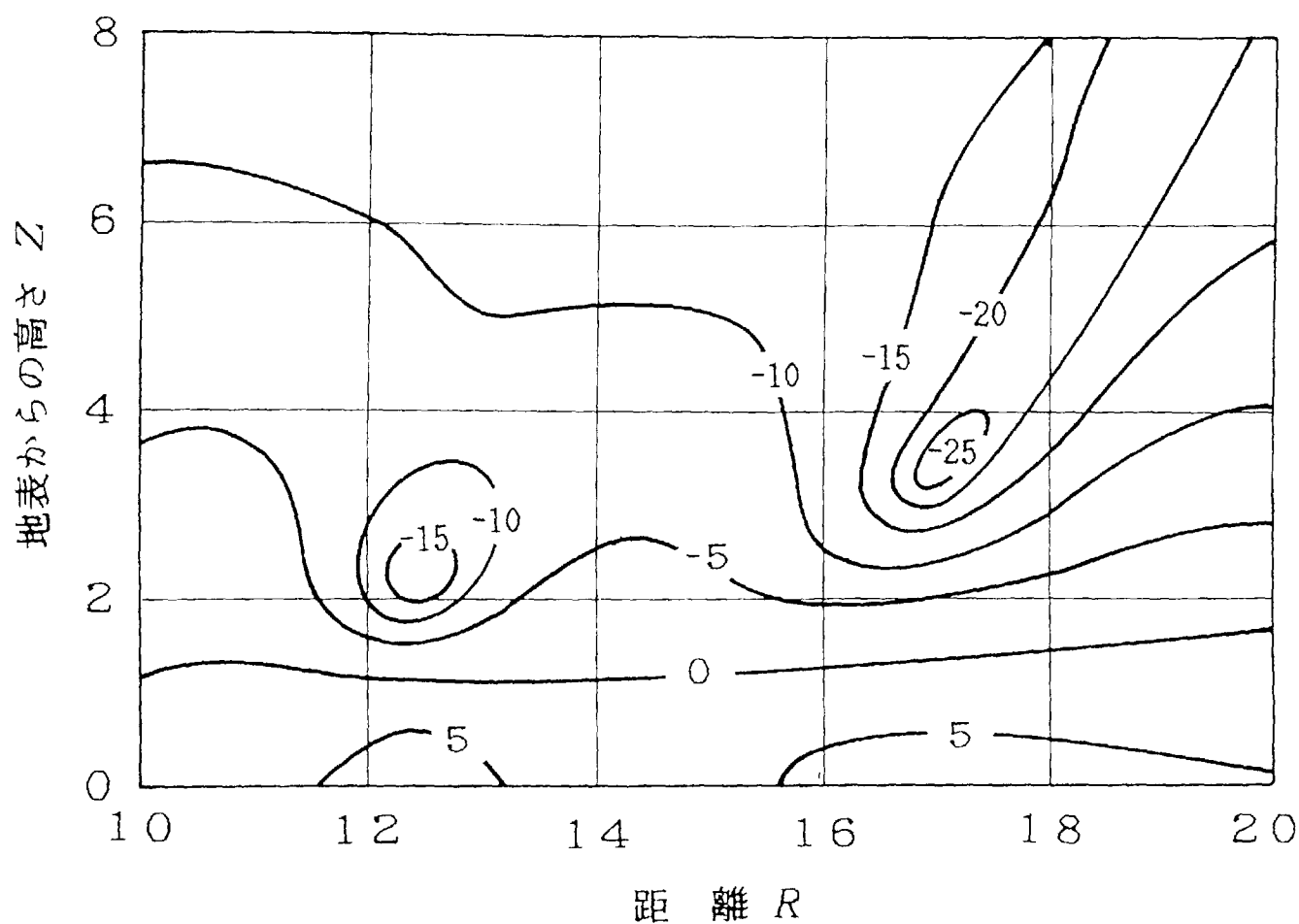


図3-62 水平方向に減少する4乗Nプロファイルダクト内での  
相対電界強度の空間分布（垂直偏波）

ただし，実線は等レベル線（数値はデシベル値）

$\eta_s = \eta_d = 2$ ， $l = 2 \sim 0.8$ ，送信高  $Z_t = 2$

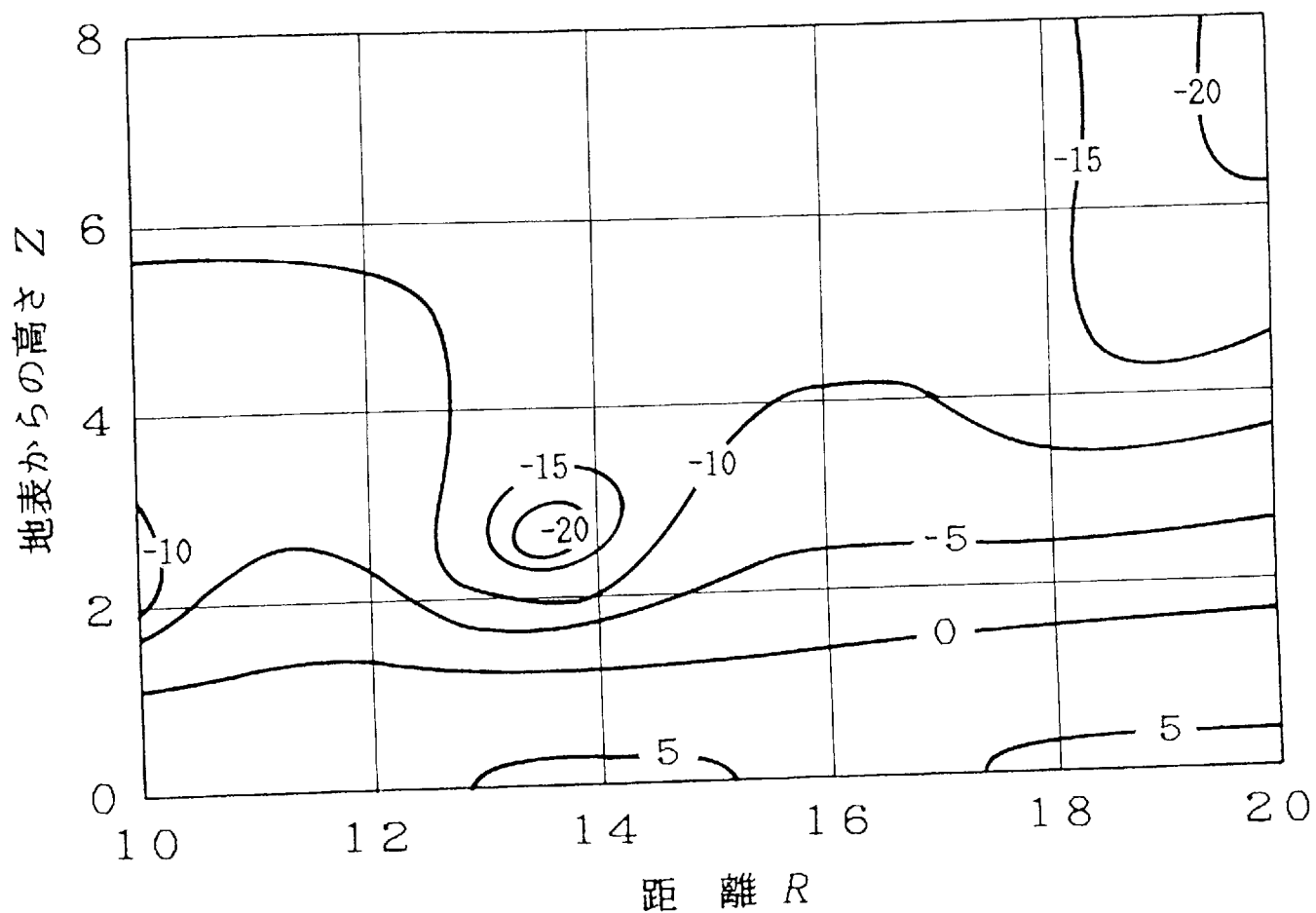


図3-63 水平方向に減少する6乗Nプロファイルダクト内での  
相対電界強度の空間分布（垂直偏波）

ただし，実線は等レベル線（数値はデシベル値）  
 $n_s = n_d = 2$ ， $l = 2 \sim 0.8$ ，送信高  $Z_t = 2$

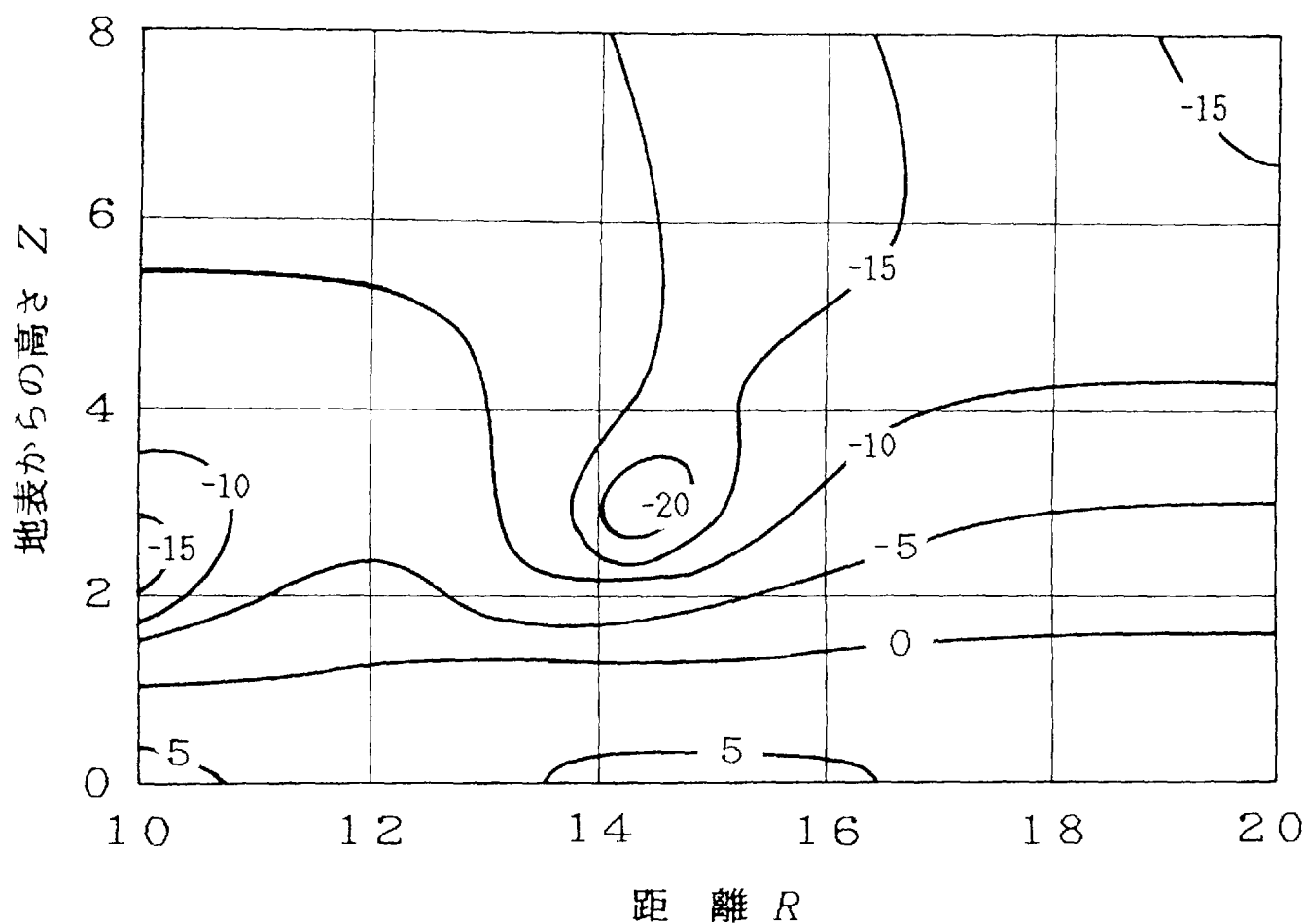


図3-64 水平方向に減少する8乗Nプロファイルダクト内での  
相対電界強度の空間分布（垂直偏波）

ただし，実線は等レベル線（数値はデシベル値）

$\eta_s = \eta_d = 2$ ， $l = 2 \sim 0.8$ ，送信高  $Z_t = 2$

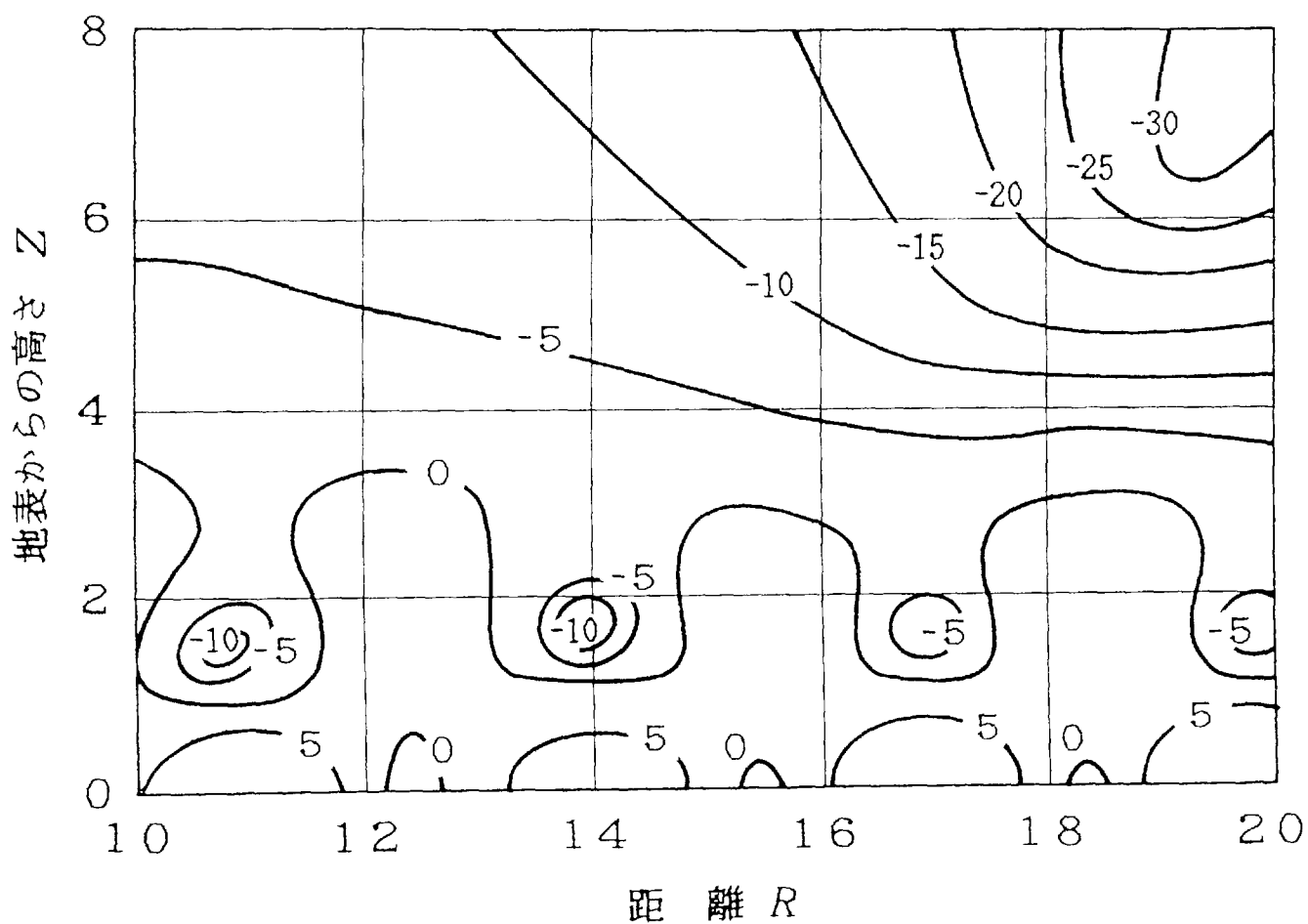


図3-65 水平方向に増大する2乗Nプロファイルダクト内での  
相対電界強度の空間分布（垂直偏波）

ただし，実線は等レベル線（数値はデシベル値）

$\eta_s = \eta_d = 2$ ， $l = 2 \sim 3.2$ ，送信高  $Z_t = 2$

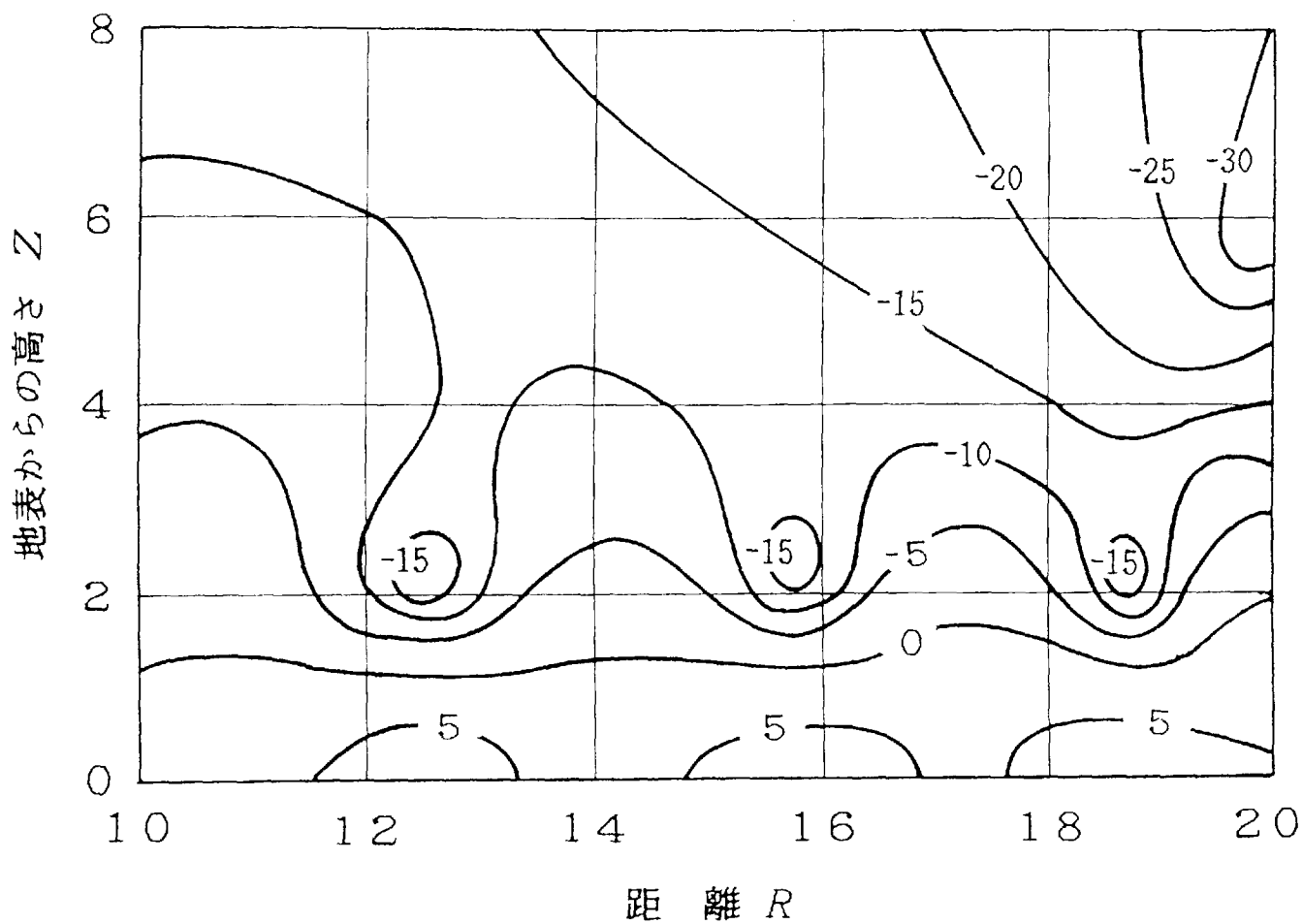


図3-66 水平方向に増大する4乗Nプロファイルダクト内での  
相対電界強度の空間分布（垂直偏波）

ただし，実線は等レベル線（数値はデシベル値）

$\eta_s = \eta_d = 2$ ， $l = 2 \sim 3.2$ ，送信高  $Z_t = 2$



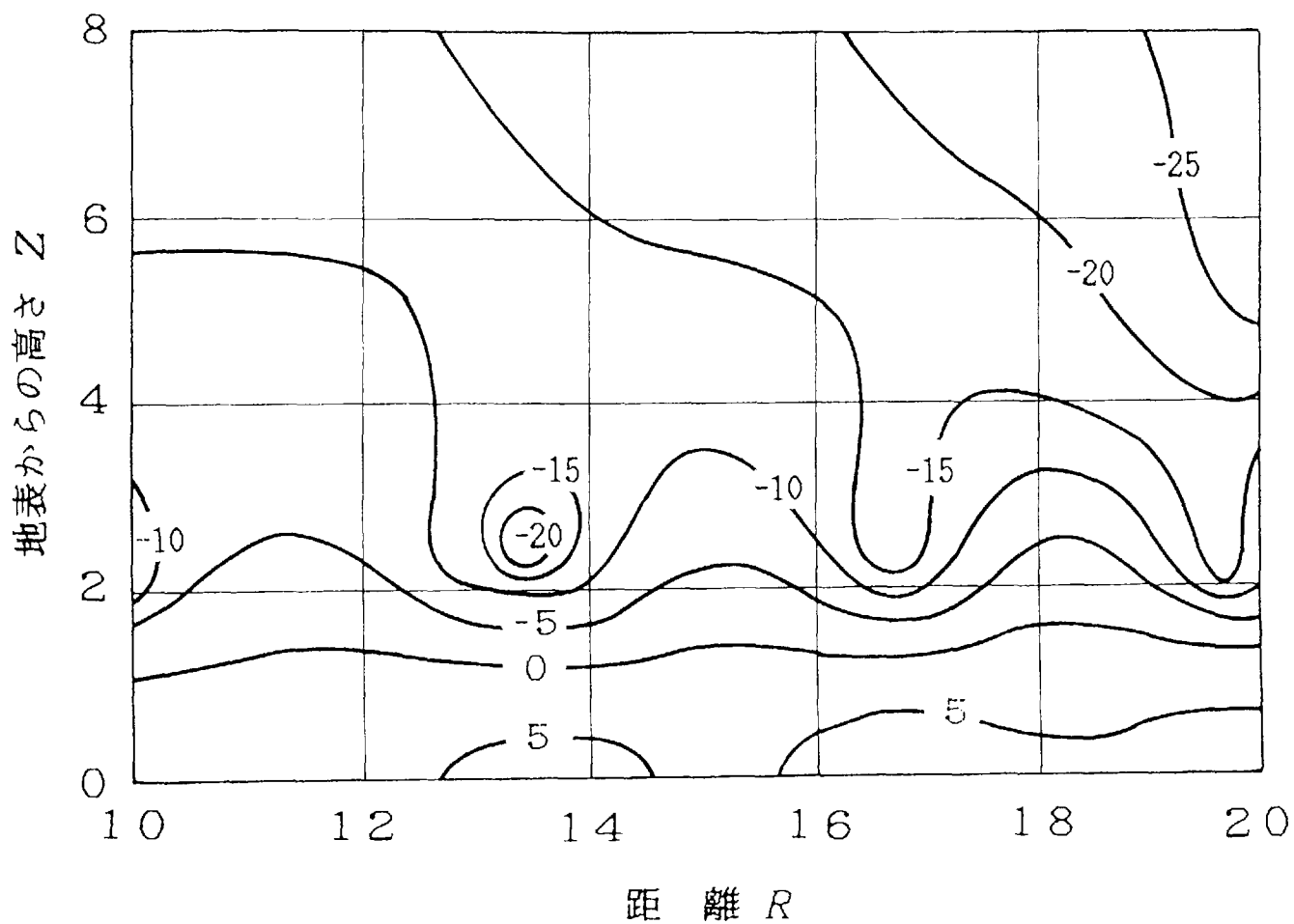


図3-67 水平方向に増大する6乗Nプロファイルダクト内での  
 相対電界強度の空間分布（垂直偏波）

ただし，実線は等レベル線（数値はデシベル値）

$\eta_s = \eta_d = 2$ ， $l = 2 \sim 3.2$ ，送信高  $Z_t = 2$

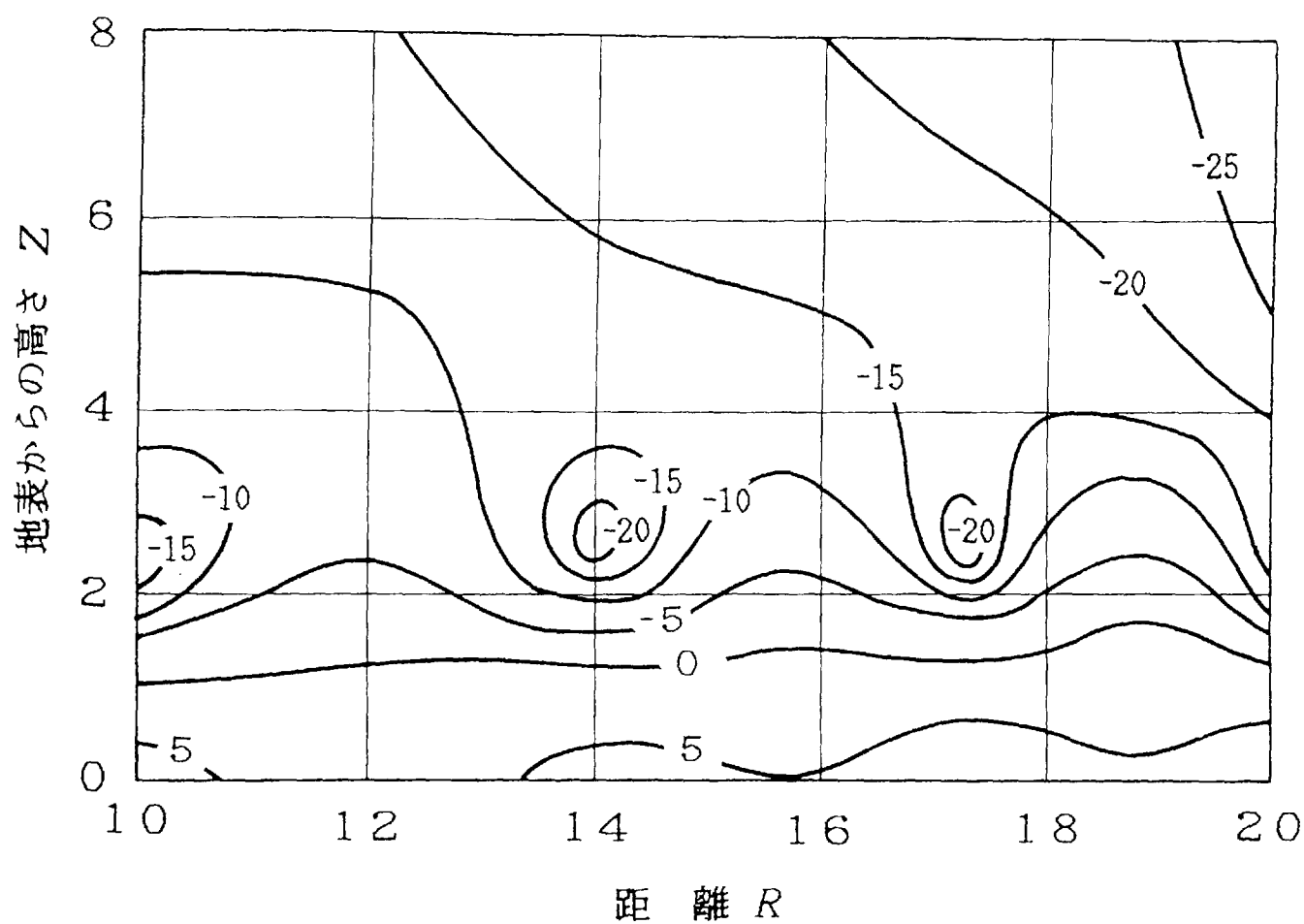


図3-68 水平方向に増大する8乗Nプロファイルダクト内での  
 相対電界強度の空間分布（垂直偏波）

ただし，実線は等レベル線（数値はデシベル値）

$\eta_s = \eta_d = 2$ ， $l = 2 \sim 3.2$ ，送信高  $Z_t = 2$

## 第 4 章 む す び

高さに対して  $2n$  乗特性をもつ  $N$  プロファイル大気層が、標準大気下に含まれるような逆転大気モデルを採用し、しかも水平方向に均一な場合と不均一な場合の双方に対して電波の伝搬への影響について解析的に考察した。

水平方向に均一な大気モデルの場合、屈折率傾度ゼロ付近の厚さの増大とともに、その屈折率分布を規定する  $2n$  乗  $N$  プロファイルの次数  $n$  の相違により遠距離での受信電界は多大な差異を生じることが明らかになった。しかも、相異なる次数  $n$  からの修正屈折率差は数  $NU$  と極めて小さく、伝搬への影響は屈折率傾度ゼロ付近のプロファイルだけに依存し、逆転層付近の屈折率変動がフェージングの一因となることは十分予想できる。なお、これらの特性は偏波に依存しないことも確認している。

水平方向に不均一な逆転大気層が与える電波の伝搬への影響については結合モード解析を用いて考察した。水平方向に均一な場合と同様、逆転大気モデルとしては高さに対して  $2n$  乗特性をもつ  $N$  プロファイル大気が標準大気下に存在し、最下層で再び線形分布を示すような逆転大気とし、水平方向の屈折率変化は最下層の深さの増減とした。距離に対して連続的に変化する不均一大気をステップ状の変化に置き換える階段近似の方法を用い、互いに隣接する大気間の結合係数の計算例を示した。結合モードはトラッピング・モード直前に最大となり、しかも大きな次数  $n$  ほどモード変換は顕著となる。一方、比較のため検討した次数  $n=0.5$  の **bilinear** モデルでの結合係数は直交性に近い特性を示し、モード変換係数は微小となる。また、距離方向に対して均一、不均一、均一で構成される不均一ダクト内での伝搬特性を空間分布の形で示した。その結果、距離とともに増

減するダクト高によって受信電界の変動が大きく異なり，次数 $n$ の影響も極めて大きいことが明らかになった．

なお，モード方程式(2-86)の根の導出にルンゲ・クッタによる数値解法を用いたところ，級数解(2-69)によるものとの一致を見ることができ， $2n$ 乗 $N$ プロファイル大気層に採用した級数解の正しいことの確認を得ている．

また，採用した不均一モデルに対してスプリット・ステップ法を用い，結合モード解析との比較を行なったところ，良好な一致を確認できた．

**謝 辞** 本研究にあたり日頃ご指導いただいた本学築地整元教授ならびに岡栄一教授，研究の機会を与えていただいた武藤文昭教授，数学的見地から数々のご助言をいただいた天野正章助教授，全般的にご検討いただいた冨沢一隆教授ならびに北見徳廣教授に心から謝意を表する．また，多くのご提言をいただいた電子技術総合研究所光技術部長矢嶋弘義氏に謝意を表する．

## 参 考 文 献

- (1) Dougherty H. T. and Hart B. A. : "Recent progress in duct propagation predictions", IEEE Trans. Antennas and Propagat., **AP-27**, pp. 542-548, No. 4 (1979).
- (2) Hitney H. V., Richter J. H., Pappert R. A., Anderson K. D. and Baumgartner Jr. G. B. : "Tropospheric radio propagation assessment", Proc. IEEE, **73**, pp. 265-283, no. 2, Feb. (1985).
- (3) Booker H. G. : "Element of radio meteorology : how weather and climate cause unorthodox radar vision beyond the geometrical horizon", Pro. IEE, pt. 3A(1), **93**, pp. 69-78 (1946).
- (4) Katzin M., Bauchman R. and Binnian W. : "3- and 9-centimeter propagation in low ocean ducts", Proc. IRE, **35**, pp. 891-905 (1947).
- (5) Unwin R. S. : "Report of factual data from the Canterbury Project", **I ~ III**, Dept. Sci. Ind. Research, Wellington, New Zealand (1951).
- (6) Anderson L. J. and Gossard E. E. : "Prediction of oceanic duct propagation from climatological data", IRE Trans. Antenna and

Propagat., **AP-3**, pp. 163-167, Oct. (1955).

- (7) Ringwalt D. L. and MacDonald F. C. : "Elevated duct propagation in the tradewinds", IEEE Trans., **AP-9**, pp. 377-383 (1961).
- (8) Jeske H. and Brocks K. : "Comparison of experiments on duct propagation above the sea with the mode theory of Booker and Walkinshaw", Radio Sci., **1**, (new series) no.8, pp. 891-895, Aug. (1966).
- (9) Schneider A. : "Oversea radar propagation within a surface duct", IEEE Trans. Antennas and Propagat., **AP-17**, pp. 254-255, March (1969).
- (10) Pidgeon V. W. : "Frequency dependence of radar ducting", Radio Sci., **5**, 3, pp. 541-550, Mar. (1970).
- (11) Pappert R. A. and Goodhart C. L. : "Case studies of beyond-the-horizon propagation in tropospheric ducting environments", Radio Sci., **12**, 1, pp. 75-87, Jan.-Feb. (1977).
- (12) Hitney H. V., Pappert R. A., Hattan C. P. and Goodhart C. L. : "Evaporation duct influences on beyond-the-horizon high altitude signals", Radio Sci., **13**, 4, pp. 669-675, Jul.-Aug. (1978).

- (13) Rubenstein P. J., Kerr D. E. and Fishback W. T. : "Experimental studies of reflection", M. I. T. Radiation Laboratory Series, **13**, pp. 294-395, McGraw-Hill, New York (1951).
- (14) Ikegami F., Akiyama T., Aoyagi T. and Yoshida H. : "Variation of radio refraction in the lower atmosphere", IEEE trans., **16**, pp. 194-200, 2, (1968).
- (15) Sasaki O. and Akiyama T. : "Studies on radio duct occurrence and properties", IEEE Trans. Antennas and Propagat., **30**, pp. 853-858, no.5 (1982).
- (16) Furry W. H. : "The bilinear modified-index profile" in Kerr D. E., ed., "Propagation of short radio waves", M. I. T. Radiation Laboratory Series, **13**, pp. 140-174, McGraw-Hill, New York (1951).
- (17) Marcus S. W. : "A model to calculate em fields in tropospheric ducting environments at frequencies through SHF", Radio Sci., **17**, 5, pp. 895-901, Sep.-Oct. (1982).
- (18) 岡 栄一 : "折れ線近似による不均一大気中の電波伝搬のモード理論", 信学誌, **55-B**, pp. 189-195 (1972).
- (19) 寺沢 寛一 : "数学概論(応用編)", pp.205-235, 岩波書店 (1960).

- (20) Morse P. M. and Feshbach H. : "Methods of theoretical Physics",  
pp. 1092-1106, McGraw-Hill, New York (1953).
- (21) 後藤 三男 : "不均一大気内の電波伝搬理論", 電電公社通研研報, **2** ,  
pp. 1-43 (1946).
- (22) Freehafer J. E. : "Physical Optics" in Kerr D. E., ed., "Propagation  
of short radio waves", M. I. T. Radiation Laboratory Series, **13** ,  
pp. 58-87, McGraw-Hill, New York (1951).
- (23) Gerks I. H. : "Propagation in a superrefractive troposphere  
with a nontrapping surface layer", Radio Sci., **3** , 3, pp. 245-249  
(1968).
- (24) Joseph R. I. : "Propagation in an evaporation duct: results  
in some simple analytic modes", Radio Sci., **7** , pp. 433-441,  
no. 4, April (1972).
- (25) Yamada R. : "On the radio wave propagation in a stratified  
atmosphere", J. Phys. Soc. Japan, **10** , pp. 71-77 (1955).
- (26) Whittaker E. T. and Watson G. N. : "A course of modern  
analysis", pp.341-351, Cambridge Univ. Press (1935).
- (27) Gerks I. H. : "Propagation in a superrefractive troposphere



with a trapping surface layer", Radio Sci., **4**, 5, pp. 413-417 (1969).

(28) Langer R. E. : "Asymptotic solution of a differential equation in the theory of microwave propagation", in Symp. Rept. Theory of Electromagnetic Waves, pp. 73-84, Interscience, New York (1951).

(29) Whittaker E. T. and Watson G. N. : "A course of modern analysis", pp.236-251, Cambridge Univ. Press (1935).

(30) Ikegami F : "Influence of atmospheric duct on microwave fading", IRE Trans., **AP-7**, pp. 252-257, 4, July (1959).

(31) Wasky R. P. : "A ray tracing computer analysis program(RAYCAP) for airborne surveillance radar applications", Proc. IEEE 1982 National Aerospace and Electronics Conference, pp. 1295-1300 (1982).

(32) Fruchtenicht H. W. : "Notes on duct influences on line-of-sight propagation", IEEE Trans. Antennas and Propagat., **AP-22**, pp. 295-302, no. 2 (1974).

(33) 岡 栄一 : "伝搬方向に不均一な接地形ダクトによる異常伝搬のレイ・トレーシング解析", 信学論(B-II), **J73-B-II**, 1, pp. 51-57 (1990-1).

- (34) Felsen L. B. : "Ray methods for modal fields in general closed and open propagation environments", Proc.IEEE, **79**, pp.1391-1400, no. 10, Oct. (1991).
- (35) Felsen L. B. and Ishihara T. : "Hybrid ray-mode formulation of ducted propagation", J. Acoust. Soc. Am., **65**, pp. 595-607, no. 3 (1979).
- (36) Felsen L. B. : "Hybrid ray-mode fields in inhomogeneous waveguide and duct", J. Acoust. Soc. Am., **69**, pp. 352-361, no. 2 (1981).
- (37) Kukushkin A. V. and Sinitsin V. G. : "Rays and modes in a nonuniform troposphere", Radio Sci., **18**, pp.573-581, no. 4, Jul.-Aug. (1983).
- (38) Ishihara T. and Felsen L. B. : "Hybrid ray-mode parametrization of high frequency propagation in an open waveguide with inhomogeneous transverse refractive index : Formulation and application to a bilinear surface duct", IEEE Trans. Antennas and Propagat., **39**, pp. 780-788, no. 6 (1991).
- (39) Ishihara T. and Felsen L. B. : "Hybrid ray-mode parametrization of high frequency propagation in an open waveguide with inhomogeneous transverse refractive index : Numerical results and quality assessment", IEEE Trans. Antennas and Propagat.,

- 39**, pp. 789-797, no. 6 (1991).
- (40) Keller J. B. : "Geometrical theory of diffraction", J. Opt. Am., **52**, pp. 116-130 (1962).
- (41) Ufimtsev P. Y. : "Method of edge waves in the physical theory of diffraction", Transaction by the U. S. Air Force Foreign Technology Division Wright Patterson AFB, Ohio (1971).
- (42) Fock V. A. : "Electromagnetic diffraction and propagation problems", ch. 11-14, Pergamon, New York (1965).
- (43) Hardin R. H. and Tappert F. D. : "Application of the split-step Fourier method to the numerical solution of nonlinear and variable coefficient wave equations", SIAM Rev., **15**, p. 423 (1973).
- (44) Thomson D. J. and Chapman N. R. : "A wide-angle split-step algorithm for the parabolic equation", J. Acoust. Soc. Am., **74**, no. 6, pp. 1848-1854 (1983).
- (45) Ko H. W., Sari J. W. and Skura J. P. : "Anomalous microwave propagation through atmospheric ducts", John Hopkins APL Tech. Dig., **4**, no. 1, pp. 12-26 (1983).
- (46) Dockery G. D. : "Modeling electromagnetic wave propagation in the troposphere using the parabolic equation", IEEE Trans. Antennas and Propagat., **36**, pp. 1464-1470, no. 10 (1988).

- (47) Craig K. H. : "Propagation modeling in the troposphere :  
Parabolic equation method", *Electron Lett.*, **24**, pp. 1136-1139  
(1989).
- (48) Kuttler J. R. and Dockery G. D. : "Teoretical description of the  
parabolic approximation/Fourier split-step method of  
representing electromagnetic propagation in the troposphere,"  
*Radio Sci.*, **26**, no. 2, pp. 381-393, (1991).
- (49) Barrios A. E. : "Parabolic equation modeling in horizontally  
inhomogeneous environments", *IEEE Trans. Antennas and  
Propagat.*, **40**, pp. 791-797, no.7 (1992).
- (50) Cho S. H. and Wait J. R. : "Analysis of microwave ducting  
in an inhomogeneous troposphere", *Pure Appl. Geophys.*,  
**116**, pp. 1118-1142 (1978).
- (51) Wait J. R. : "Coupled mode analysis for a nonuniform  
tropospheric wave guide", *Radio Sci.*, **15**, no. 3, pp. 667-673  
(1980).
- (52) Ko H. W., Burkom H. S., Skura J. P. and Roberts D. A. :  
"An analysis of EMPE code performance in a selection of  
laterally inhomogeneous atmospheric-duct environments",  
*John Hopkins APL Tech. Dig.*, **9**, no.2, pp. 89-100 (1988).

- (53) Pryce M. H. L. : "The diffraction of radio wave by the curvature of the earth", *Advances in Phys.*, **2**, pp. 67-95 (1953).
- (54) Pekeris C. L. : "Accuracy of the earth flattening approximation", *Phys. Rev.*, **70**, pp. 518-522 (1946).
- (55) 川口順也 : "2  $n$  乗  $N$  プロファイルをもつ大気内での長距離伝搬", *信学論(B-II)*, **J75-B-II**, 6, pp. 379-388 (1992-6).
- (56) 川口順也 : "微分方程式  $g''(\zeta) + (\zeta^n + \alpha)g(\zeta) = 0$  の解とその応用", *信学論(A)*, **J76-A**, 10, pp. 1487-1490 (1993-10).
- (57) 川口順也, 岡 栄一 : "水平方向に高さが不均一な 2  $n$  乗  $N$  プロファイル・ダクト内伝搬の結合モード解析", *信学論(B-II)*, **J77-B-II**, 9, pp. 467-478 (1994-9).
- (58) Banos A. : "Dipole radiation in the presence of a conducting half-space", ch. 1, ch. 2, Pergamon Press (1966).
- (59) Stratton J. A. : "Electromagnetic theory", p. 412, McGraw-Hill, New York, (1941).
- (60) Watson G. N. : "A treatise on the theory of Bessel functions", pp. 188-190, Cambridge Univ. Press (1962).

- (61) Budden K. G. : "Radio waves in the ionosphere", pp.283-318, Cambridge Univ. Press. (1961).
- (62) Harvard Univ. Computation Lab. : "Tables of the modified Hankel functions of order one-third and of their derivatives", Harvard Univ. Press, London (1945).
- (63) Freehafer J. E. : "The linear modified-index profile"  
in Kerr D. E., ed., "Propagation of short radio waves", M. I. T. Radiation Laboratory Series, **13**, pp. 87-95, McGraw-Hill, New York (1951).
- (64) Wylie C. R. : "Advanced Engineering Mathematics", pp. 405-416, McGraw Hill, New York (1960).
- (65) 寺沢 寛一 : "数学概論", pp.298-300, 岩波書店 (1960).

## 【付 録 1】 微 分 方 程 式 $g''(\zeta) + (\zeta^n + \alpha)g(\zeta) = 0$ の 解

2 階の微分方程式の解法の一つに W.K.B. 法<sup>(19),(20)</sup>がある．転移点が複数接近して存在する場合，取り扱いが煩雑となり，近似度が低下する．また，ルンゲ・クッタ法等の数値解法も多用されるが，時として長時間を要する．

不均一媒質における波動方程式からしばしば得られる 2 階の微分方程式のうち，次に示した微分方程式の厳密解をフロベニウスの方法<sup>(64)</sup>により級数表示で求めた．この級数解は 1 価関数であることから，関数値の算出は容易であり，短時間でその関数値を得ることができる．また，転移点の有無にかかわらずこの解は有効である．なお，微分方程式を変形することにより，変数の次数  $n=1$  での解は Airy 関数<sup>(60),(61)</sup>，また次数  $n=2$  の場合 Weber 関数<sup>(26)</sup>とそれぞれ既知関数で与えられるが，筆者の知る限り  $n \geq 3$  での解は調べられていない．ここでは任意の整数のうち偶数  $n(=2, 4, \dots)$  の場合に対しての解を統一的に示した<sup>(56)</sup>．

### A - 1 . 級 数 解

フロベニウスの方法に従って，微分方程式

$$\frac{d^2 g(\zeta)}{d\zeta^2} + \phi(\zeta)g(\zeta) = 0 \quad (\text{A-1})$$

$$\phi(\zeta) = \zeta^n + \alpha, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (\text{A-2})$$

の 1 組の級数解  $g_1(\zeta, \alpha)$ ,  $g_2(\zeta, \alpha)$  が

$$g_1(\zeta, \alpha) = a_0 + a_1\zeta + \dots + a_m\zeta^m + \dots \quad (\text{A-3})$$

$$g_2(\zeta, \alpha) = \zeta (b_0 + b_1\zeta + \dots + b_m\zeta^m + \dots) \quad (\text{A-4})$$

と求まる．係数  $a_m$ ,  $b_m$ , ( $m \geq 0$ ) は

$$a_{m+2} = -\frac{\alpha a_m + a_{m-n}}{(m+2)(m+1)} \quad (\text{A-5})$$

$$b_{m+2} = -\frac{\alpha b_m + b_{m-n}}{(m+3)(m+2)} \quad (\text{A-6})$$

の漸化式で与えられる．級数(A-3), (A-4)の導関数 $g_1'(\zeta, \alpha)$ ,  $g_2'(\zeta, \alpha)$ は

$$g_1'(\zeta, \alpha) = \zeta (c_0 + c_1 \zeta + \cdots + c_m \zeta^m + \cdots) \quad (\text{A-7})$$

$$g_2'(\zeta, \alpha) = d_0 + d_1 \zeta + \cdots + d_m \zeta^m + \cdots \quad (\text{A-8})$$

と書け，係数 $c_m$ ,  $d_m$ も

$$c_m = -\frac{\alpha a_m + a_{m-n}}{m+1} \quad (\text{A-9})$$

$$d_{m+2} = -\frac{\alpha b_m + b_{m-n}}{m+2} \quad (\text{A-10})$$

の漸化式となる．但し，

$$a_0 = \frac{(n+2)^{1/(n+2)}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{n+2}\right)}, \quad b_0 = \frac{(n+2)^{-1/(n+2)}}{\Gamma\left(\frac{n+3}{n+2}\right)} \quad (\text{A-11})$$

$$a_1 = b_1 = 0$$

とおいてある．なお， $\Gamma$ はガンマ関数である．

係数 $a_m$ ,  $b_m$ ,  $c_m$ ,  $d_m$ はそれぞれ(A-5), (A-6), (A-9), (A-10)により順次求められるが，ここで一般項を示す．但し， $c_m$ ,  $d_m$ はそれぞれ $a_m$ ,  $b_m$ に従属していることから省くことにし，また(A-2)の変数 $\zeta$ の次数 $n$ が偶数( $n=2N$ )の場合について求めることにすると，一般項 $a_m$ ,  $b_m$ は以下に示すような $\alpha$ の多項式となる．

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{(2m)!} \sum_{i=0}^{[m/M]} (-1)^{Ni} \beta_{Mi}(m) \alpha^{m-Mi}$$

$$b_{2m} = \frac{(-1)^m b_0}{(2m+1)!} \sum_{i=0}^{[m/M]} (-1)^{Ni} \gamma_{Mi}(m) \alpha^{m-Mi}$$

$$a_{2m+1} = b_{2m+1} = 0, \quad M = N+1 \quad (\text{A-12})$$



但し,

$$\begin{aligned}
\beta_{Mi}(m) &= \beta_{Mi}(m-1) + \beta_{M(i-1)}(m-M) \frac{\Gamma(2m-1)}{\Gamma(2m-2M+1)}, & m \geq Mi > 0 \\
&= 0, & m < Mi \\
\gamma_{Mi}(m) &= \gamma_{Mi}(m-1) + \gamma_{M(i-1)}(m-M) \frac{\Gamma(2m)}{\Gamma(2m-2M+2)}, & m \geq Mi > 0 \\
&= 0, & m < Mi \\
\beta_0(m) &= \gamma_0(m) = 1
\end{aligned} \tag{A-13}$$

である．なお，記号[ ]はガウス記号である．但し，[ $k$ ]の変数 $k$ が負のとき  
[ $k$ ]=0とする．

## A-2. 解の性質

最初に，解(A-3)，(A-4)の独立性を調べる．微分方程式(A-1)に含まれる  
 $\phi(\zeta)$ は変域 $|\zeta| < \infty$ で正則であり， $\phi(\zeta)$ が確定特異点をもたない場合によく用い  
られる手法<sup>(65)</sup>を使い，方程式(A-1)の解をあらためて導出する．任意の定数 $A$ ，  
 $B$ を用いて

$$v_0(\zeta) = A + B\zeta \tag{A-14}$$

$$v_k(\zeta) = \int_0^\zeta (z - \zeta) \phi(z) v_{k-1}(z) dz, \quad (k = 1, 2, \dots) \tag{A-15}$$

より $v_0(\zeta)$ ， $v_1(\zeta)$ ， $\dots$ の関数列を作る．但し，積分路は $z=0$ から $z=\zeta$ に至るもの  
で，便宜上これを直線とする．さらに，関数列(A-14)，(A-15)の総和からなる  
級数

$$v(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(\zeta) \tag{A-16}$$

を定義する．ここで，式(A-15)の2階導関数

$$\frac{d^2 v_k(\zeta)}{d\zeta^2} = -\phi(\zeta) v_{k-1}(\zeta) \tag{A-17}$$

を用いると，級数 $v(\zeta)$ の2階導関数は

$$\begin{aligned}\frac{d^2 v(\zeta)}{d\zeta^2} &= \frac{d^2 v_0(\zeta)}{d\zeta^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d^2 v_k(\zeta)}{d\zeta^2} = -\phi(\zeta) \sum_{k=1}^{\infty} v_{k-1}(\zeta) \\ &= -\phi(\zeta)v(\zeta)\end{aligned}\quad (\text{A-18})$$

となり，級数(A-16)は微分方程式(A-1)を満足する．しかも， $v(\zeta)$ は任意定数 $A$ ， $B$ を含むことから，それぞれを係数とする級数に分離でき，

$$v(\zeta) = Au_1(\zeta) + Bu_2(\zeta) \quad (\text{A-19})$$

と表すことができる．つまり， $v(\zeta)$ は一般解であり， $u_1(\zeta)$ ， $u_2(\zeta)$ は互いに独立な解であることがわかる．

なお，式(A-2)の $\phi(\zeta)$ の変域 $|\zeta| < \infty$ 内にある円 $S$ 内での $|\phi(\zeta)|$ および $|v_0(\zeta)|$ の最大値をそれぞれ $\phi_0$ および $\tau$ とすると，

$$|v_k(\zeta)| \leq \frac{\tau \phi_0^k |\zeta|^{2k}}{k!} \quad (\text{A-20})$$

が成立する<sup>(65)</sup>．ここで級数

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\phi_0 |\zeta|^2)^k}{k!}$$

は収束級数であり，式(A-16)より $v(\zeta)$ は $S$ 内で一様収束する．

ところで，式(A-2)の $\phi(\zeta)$ を用いて関数列(A-14)，(A-15)を作り級数解(A-16)を求めると，式(A-19)の $u_1(\zeta)$ ， $u_2(\zeta)$ はそれぞれ

$$u_1(\zeta) = \frac{g_1(\zeta, \alpha)}{a_0}, \quad u_2(\zeta) = \frac{g_2(\zeta, \alpha)}{b_0} \quad (\text{A-21})$$

となり， $g_1(\zeta, \alpha)$ ， $g_2(\zeta, \alpha)$ が互いに独立な解であることがわかる．しかも，これらは変域 $|\zeta| < \infty$ で成立する．

次に，微分方程式(A-1)に $g_1(\zeta, \alpha)$ ， $g_2(\zeta, \alpha)$ を適用して

$$\frac{d^2 g_1(\zeta, \alpha)}{d\zeta^2} + \phi(\zeta)g_1(\zeta, \alpha) = 0 \quad (\text{A-22})$$

$$\frac{d^2 g_2(\zeta, \alpha)}{d\zeta^2} + \phi(\zeta) g_2(\zeta, \alpha) = 0 \quad (\text{A-23})$$

とし, (A-23)  $\times g_1(\zeta, \alpha) - (\text{A-22}) \times g_2(\zeta, \alpha)$  を作ると,

$$g_1(\zeta, \alpha) \frac{d^2 g_2(\zeta, \alpha)}{d\zeta^2} - g_2(\zeta, \alpha) \frac{d^2 g_1(\zeta, \alpha)}{d\zeta^2} = 0$$

であり, これを積分して

$$g_1(\zeta, \alpha) \frac{dg_2(\zeta, \alpha)}{d\zeta} - g_2(\zeta, \alpha) \frac{dg_1(\zeta, \alpha)}{d\zeta} = \text{const.} \quad (\text{A-24})$$

が得られる. 解  $g_1(\zeta, \alpha)$ ,  $g_2(\zeta, \alpha)$  が互いに独立な解であるから両者の

Wronskian は

$$W \equiv g_1(\zeta, \alpha) \frac{dg_2(\zeta, \alpha)}{d\zeta} - g_2(\zeta, \alpha) \frac{dg_1(\zeta, \alpha)}{d\zeta} \neq 0 \quad (\text{A-25})$$

であり, 式(A-25)は定数( $\neq 0$ )となる.

級数解(A-3), (A-4)を用いて Wronskian を求めると,  $W$ は

$$W = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \zeta^k \quad (\text{A-26})$$

と $\zeta$ の無限級数で与えられる. 但し,  $a_1 = b_1 = 0$ を考慮に入れることにより, 係数  $f_k$ は

$$f_k = \sum_{i=0}^k (k+1-2i) a_i b_{k-i} \quad (\text{A-27})$$

と表すことができるが, 式(A-24), (A-25)より

$$f_0 = a_0 b_0, \quad f_k = 0, \quad (k \geq 1) \quad (\text{A-28})$$

となる. 但し, 係数  $f_k$ , ( $k \geq 1$ )は式(A-27)と漸化式(A-5), (A-6)から順次求めることができ,

$$f_1 = 0$$

$$f_2 = 3a_0 b_2 - b_0 a_2 = 3a_0 \frac{(-\alpha b_0)}{2 \cdot 3} - b_0 \frac{(-\alpha a_0)}{2} = 0$$

$$f_3 = -\frac{a_0 b_{1-n} - b_0 a_{1-n}}{3}$$

$$f_4 = -\frac{a_0 b_{2-n} - b_0 a_{2-n}}{4}$$

$$f_5 = -\frac{a_0 b_{3-n} - b_0 a_{3-n}}{5} + \frac{\alpha(a_0 b_{1-n} - b_0 a_{1-n}/3)}{5 \cdot 2}$$

$$f_6 = -\frac{a_0 b_{4-n} - b_0 a_{4-n}}{6} + \frac{\alpha(a_0 b_{2-n} - b_0 a_{2-n}/3)}{6 \cdot 2} + \frac{a_{1-n} b_{1-n}}{4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2}$$

$$f_7 = -\frac{a_0 b_{5-n} - b_0 a_{5-n}}{7} + \frac{\alpha(a_0 b_{3-n} - b_0 a_{3-n}/3)}{7 \cdot 2} - \frac{\alpha^2(a_0 b_{1-n} - b_0 a_{1-n}/5)}{7 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{a_{1-n} b_{2-n}}{5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2}$$

$$f_8 = -\frac{a_0 b_{6-n} - b_0 a_{6-n}}{8} + \frac{\alpha(a_0 b_{4-n} - b_0 a_{4-n}/3)}{8 \cdot 2} - \frac{\alpha^2(a_0 b_{2-n} - b_0 a_{2-n}/5)}{8 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{a_{1-n} b_{3-n} - b_{1-n} a_{3-n}/4}{5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2} + \frac{a_{2-n} b_{2-n}}{5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3} - \frac{\alpha a_{1-n} b_{1-n}}{5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}$$

$$f_9 = -\frac{a_0 b_{7-n} - b_0 a_{7-n}}{9} + \frac{\alpha(a_0 b_{5-n} - b_0 a_{5-n}/3)}{9 \cdot 2} - \frac{\alpha^2(a_0 b_{3-n} - b_0 a_{3-n}/5)}{9 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{\alpha^3(a_0 b_{1-n} - b_0 a_{1-n}/7)}{9 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{a_{1-n} b_{4-n}/7 - b_{1-n} a_{4-n}/(5 \cdot 4)}{3 \cdot 3} + \frac{a_{2-n} b_{3-n}}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3} - \frac{\alpha a_{1-n} b_{2-n}}{9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4}$$

$$f_{10} = -\frac{a_0 b_{8-n} - b_0 a_{8-n}}{10} + \frac{\alpha(a_0 b_{6-n} - b_0 a_{6-n}/3)}{10 \cdot 2} - \frac{\alpha^2(a_0 b_{4-n} - b_0 a_{4-n}/5)}{10 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{\alpha^3(a_0 b_{2-n} - b_0 a_{2-n}/7)}{10 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{a_{2-n} b_{4-n}/7 - b_{2-n} a_{4-n}/(5 \cdot 5)}{6 \cdot 4} + \frac{5a_{1-n} b_{5-n}/2 - b_{1-n} a_{5-n}}{7 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} - \frac{\alpha(13a_{1-n} b_{3-n}/8 - b_{1-n} a_{3-n}/3)}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2} + \frac{a_{3-n} b_{3-n}}{6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4} - \frac{\alpha a_{2-n} b_{2-n}}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{\alpha^2 a_{1-n} b_{1-n}}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}$$

.....

と与えられる．上式に対して係数 $a_j=b_j=0$ , ( $j<0$ )であることを考慮に入れ，係数 $a_j$ ,  $b_j$ の添字 $j$ が正およびゼロの範囲内で次数 $n$ を選択すると， $f_k=0$ であることが確認できる．例えば， $f_{10}$ では $n=1\sim 8$ の範囲で $f_{10}=0$ となり， $n\geq 9$ では係数 $f_{10}$ は存在せず，やはり $f_{10}=0$ ということになる．他も同様である．

従って，解(A-3), (A-4)の Wronskian は

$$\begin{aligned} W &= g_1(\zeta, \alpha) \frac{dg_2(\zeta, \alpha)}{d\zeta} - g_2(\zeta, \alpha) \frac{dg_1(\zeta, \alpha)}{d\zeta} \\ &= a_0 b_0 \end{aligned} \quad (\text{A-29})$$

となる．

なお， $\alpha=0$ での微分方程式(A-1)の解 $g_1(\zeta, 0)$ ,  $g_2(\zeta, 0)$ は $\sqrt{\zeta}$ と $1/(n+2)$ 次の Bessel 関数との積 $\sqrt{\zeta} Z_{\frac{1}{n+2}}(\zeta_0)$ ，(但し， $\zeta_0 = \frac{2\zeta^{(n+2)/2}}{n+2}$ ) であり，得られた級数解 $g_1(\zeta, 0)$ ,  $g_2(\zeta, 0)$ はそれぞれ

$$g_1(\zeta, 0) = \sqrt{\zeta} J_{-\frac{1}{n+2}}(\zeta_0) \quad (\text{A-30})$$

$$g_2(\zeta, 0) = \sqrt{\zeta} J_{\frac{1}{n+2}}(\zeta_0) \quad (\text{A-31})$$

に一致する．

以上，ここで採用した微分方程式の解法は級数解の各項を直接導出していくものであり，非常に煩雑な演算となる．一方，フロベニウス法は級数解の各項の係数を決定する方法であることから，微分方程式(A-1)の解法としては後者がより有効である．なお，級数(A-3), (A-4), (A-7), (A-8)からの関数値はルンゲ・クッタ法から得られる数値に一致し，級数解の正しいことの確認を得ている．

### A-3. 級数係数 $a_m$ , $b_m$ の例

先に示した級数係数 $a_m$ ,  $b_m$ の一例( $N=1, 2, 3, 4$ )を式(A-12)より具体的に示しておく．

1)  $n=2$ , ( $N=1$ ) の場合

$$a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = a_{2m+1} = 0$$

$$a_2 = -\frac{\alpha a_0}{2!}$$

$$a_4 = \frac{\alpha^2 a_0}{4!} - \frac{a_0}{4!} 2 \cdot 1$$

$$a_6 = -\frac{\alpha^3 a_0}{6!} + \frac{\alpha a_0}{6!} (4 \cdot 3 + 2 \cdot 1)$$

$$a_8 = \frac{\alpha^4 a_0}{8!} - \frac{\alpha^2 a_0}{8!} (6 \cdot 5 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 1) + \frac{a_0}{8!} 6 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1$$

$$a_{10} = -\frac{\alpha^5 a_0}{10!} + \frac{\alpha^3 a_0}{10!} (8 \cdot 7 + 6 \cdot 5 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 1) - \frac{\alpha a_0}{10!} \{8 \cdot 7(4 \cdot 3 + 2 \cdot 1) + 6 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1\}$$

$$\begin{aligned} a_{12} = & \frac{\alpha^6 a_0}{12!} - \frac{\alpha^4 a_0}{12!} (10 \cdot 9 + 8 \cdot 7 + 6 \cdot 5 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 1) \\ & + \frac{\alpha^2 a_0}{12!} \{10 \cdot 9(6 \cdot 5 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 1) + 8 \cdot 7(4 \cdot 3 + 2 \cdot 1) + 6 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1\} \\ & - \frac{a_0}{12!} 10 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{14} = & -\frac{\alpha^7 a_0}{14!} + \frac{\alpha^5 a_0}{14!} (12 \cdot 11 + 10 \cdot 9 + 8 \cdot 7 + 6 \cdot 5 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 1) \\ & - \frac{\alpha^3 a_0}{14!} \{12 \cdot 11(8 \cdot 7 + 6 \cdot 5 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 1) + 10 \cdot 9(6 \cdot 5 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 1) \\ & + 8 \cdot 7(4 \cdot 3 + 2 \cdot 1) + 6 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1\} \\ & + \frac{\alpha a_0}{14!} [12 \cdot 11\{8 \cdot 7(4 \cdot 3 + 2 \cdot 1) + 6 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1\} + 10 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{16} = & \frac{\alpha^8 a_0}{16!} - \frac{\alpha^6 a_0}{16!} (14 \cdot 13 + 12 \cdot 11 + 10 \cdot 9 + 8 \cdot 7 + 6 \cdot 5 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 1) \\ & + \frac{\alpha^4 a_0}{16!} \{14 \cdot 13(10 \cdot 9 + 8 \cdot 7 + 6 \cdot 5 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 1) \\ & + 12 \cdot 11(8 \cdot 7 + 6 \cdot 5 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 1) + 10 \cdot 9(6 \cdot 5 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 1) \\ & + 8 \cdot 7(4 \cdot 3 + 2 \cdot 1) + 6 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1\} \\ & - \frac{\alpha^2 a_0}{16!} [14 \cdot 13\{10 \cdot 9(6 \cdot 5 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 1) + 8 \cdot 7(4 \cdot 3 + 2 \cdot 1) + 6 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1\} \\ & + 12 \cdot 11\{8 \cdot 7(4 \cdot 3 + 2 \cdot 1) + 6 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1\} + 10 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1] \\ & + \frac{a_0}{16!} 14 \cdot 13 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1 \end{aligned}$$

.....

$$b_1 = b_3 = b_5 = \cdots = b_{2m+1} = 0$$

$$b_2 = -\frac{\alpha b_0}{3!}$$

$$b_4 = \frac{\alpha^2 b_0}{5!} - \frac{b_0}{5!} 3 \cdot 2$$

$$b_6 = -\frac{\alpha^3 b_0}{7!} + \frac{\alpha b_0}{7!} (5 \cdot 4 + 3 \cdot 2)$$

$$b_8 = \frac{\alpha^4 b_0}{9!} - \frac{\alpha^2 b_0}{9!} (7 \cdot 6 + 5 \cdot 4 + 3 \cdot 2) + \frac{b_0}{9!} 7 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2$$

$$b_{10} = -\frac{\alpha^5 b_0}{11!} + \frac{\alpha^3 b_0}{11!} (9 \cdot 8 + 7 \cdot 6 + 5 \cdot 4 + 3 \cdot 2) - \frac{\alpha b_0}{11!} \{9 \cdot 8(5 \cdot 4 + 3 \cdot 2) + 7 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2\}$$

$$\begin{aligned} b_{12} = & \frac{\alpha^6 b_0}{13!} - \frac{\alpha^4 b_0}{13!} (11 \cdot 10 + 9 \cdot 8 + 7 \cdot 6 + 5 \cdot 4 + 3 \cdot 2) \\ & + \frac{\alpha^2 b_0}{13!} \{11 \cdot 10(7 \cdot 6 + 5 \cdot 4 + 3 \cdot 2) + 9 \cdot 8(5 \cdot 4 + 3 \cdot 2) + 7 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2\} \\ & - \frac{b_0}{13!} 11 \cdot 10 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{14} = & -\frac{\alpha^7 b_0}{15!} + \frac{\alpha^5 b_0}{15!} (13 \cdot 12 + 11 \cdot 10 + 9 \cdot 8 + 7 \cdot 6 + 5 \cdot 4 + 3 \cdot 2) \\ & - \frac{\alpha^3 b_0}{15!} \{13 \cdot 12(9 \cdot 8 + 7 \cdot 6 + 5 \cdot 4 + 3 \cdot 2) + 11 \cdot 10(7 \cdot 6 + 5 \cdot 4 + 3 \cdot 2) \\ & + 9 \cdot 8(5 \cdot 4 + 3 \cdot 2) + 7 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2\} \end{aligned}$$

$$+ \frac{\alpha b_0}{15!} [13 \cdot 12 \{9 \cdot 8(5 \cdot 4 + 3 \cdot 2) + 7 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2\} + 11 \cdot 10 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2]$$

$$\begin{aligned} b_{16} = & \frac{\alpha^8 b_0}{17!} - \frac{\alpha^6 b_0}{17!} (15 \cdot 14 + 13 \cdot 12 + 11 \cdot 10 + 9 \cdot 8 + 7 \cdot 6 + 5 \cdot 4 + 3 \cdot 2) \\ & + \frac{\alpha^4 b_0}{17!} \{15 \cdot 14(11 \cdot 10 + 9 \cdot 8 + 7 \cdot 6 + 5 \cdot 4 + 3 \cdot 2) \\ & + 13 \cdot 12(9 \cdot 8 + 7 \cdot 6 + 5 \cdot 4 + 3 \cdot 2) + 11 \cdot 10(7 \cdot 6 + 5 \cdot 4 + 3 \cdot 2) \\ & + 9 \cdot 8(5 \cdot 4 + 3 \cdot 2) + 7 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \frac{\alpha^2 b_0}{17!} [15 \cdot 14 \{11 \cdot 10(7 \cdot 6 + 5 \cdot 4 + 3 \cdot 2) + 9 \cdot 8(5 \cdot 4 + 3 \cdot 2) + 7 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2\} \\ & + 13 \cdot 12 \{9 \cdot 8(5 \cdot 4 + 3 \cdot 2) + 7 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2\} + 11 \cdot 10 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2] \end{aligned}$$

$$+ \frac{b_0}{17!} 15 \cdot 14 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2$$

.....

2)  $n=4$ , ( $N=2$ ) の場合

$$a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = a_{2m+1} = 0$$

$$a_2 = -\frac{\alpha a_0}{2!}$$

$$a_4 = \frac{\alpha^2 a_0}{4!}$$

$$a_6 = -\frac{\alpha^3 a_0}{6!} - \frac{a_0}{6!} 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$a_8 = \frac{\alpha^4 a_0}{8!} + \frac{\alpha a_0}{8!} (6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)$$

$$a_{10} = -\frac{\alpha^5 a_0}{10!} - \frac{\alpha^2 a_0}{10!} (8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)$$

$$a_{12} = \frac{\alpha^6 a_0}{12!} + \frac{\alpha^3 a_0}{12!} (10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 + 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)$$

$$+ \frac{a_0}{12!} 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$a_{14} = -\frac{\alpha^7 a_0}{14!} - \frac{\alpha^4 a_0}{14!} (12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 + 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 + 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)$$

$$- \frac{\alpha a_0}{14!} \{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 (6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)\}$$

$$a_{16} = \frac{\alpha^8 a_0}{16!} + \frac{\alpha^5 a_0}{16!} (14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 + 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 + \cdots + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)$$

$$+ \frac{\alpha^2 a_0}{16!} \{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 (6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)$$

$$+ 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 (8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)\}$$

.....

$$b_1 = b_3 = b_5 = \cdots = b_{2m+1} = 0$$

$$b_2 = -\frac{\alpha b_0}{3!}$$

$$b_4 = \frac{\alpha^2 b_0}{5!}$$

$$b_6 = -\frac{\alpha^3 b_0}{7!} - \frac{b_0}{7!} 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$$

$$b_8 = \frac{\alpha^4 b_0}{9!} + \frac{\alpha b_0}{9!} (7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2)$$



$$\begin{aligned}
b_{10} &= -\frac{\alpha^5 b_0}{11!} - \frac{\alpha^2 b_0}{11!} (9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 + 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2) \\
b_{12} &= \frac{\alpha^6 b_0}{13!} + \frac{\alpha^3 b_0}{13!} (11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 + 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 + 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2) \\
&\quad + \frac{b_0}{13!} 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \\
b_{14} &= -\frac{\alpha^7 b_0}{15!} - \frac{\alpha^4 b_0}{15!} (13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 + 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 + 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 + 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2) \\
&\quad - \frac{\alpha b_0}{15!} \{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 + 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 (7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2)\} \\
b_{16} &= \frac{\alpha^8 b_0}{17!} + \frac{\alpha^5 b_0}{17!} (15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 + 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 + \cdots + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2) \\
&\quad + \frac{\alpha^2 b_0}{17!} \{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 + 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 (7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2) \\
&\quad \quad + 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot (9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 + 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2)\} \\
&\quad \cdots \cdots \cdots
\end{aligned}$$

3)  $n=6$ , ( $N=3$ ) の場合

$$\begin{aligned}
a_1 &= a_3 = a_5 = \cdots = a_{2m+1} = 0 \\
a_2 &= -\frac{\alpha a_0}{2!} \\
a_4 &= \frac{\alpha^2 a_0}{4!} \\
a_6 &= -\frac{\alpha^3 a_0}{6!} \\
a_8 &= \frac{\alpha^4 a_0}{8!} - \frac{\alpha_0}{8!} 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\
a_{10} &= -\frac{\alpha^5 a_0}{10!} + \frac{\alpha a_0}{10!} (8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \\
a_{12} &= \frac{\alpha^6 a_0}{12!} - \frac{\alpha^2 a_0}{12!} (10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 + 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \\
a_{14} &= -\frac{\alpha^7 a_0}{14!} + \frac{\alpha^3 a_0}{14!} (12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 + 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 + 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \\
&\quad + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \\
a_{16} &= \frac{\alpha^8 a_0}{16!} - \frac{\alpha^4 a_0}{16!} (14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 + 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \\
&\quad + \cdots + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)
\end{aligned}$$

$$+ \frac{\alpha_0}{16!} 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

.....

$$b_1 = b_3 = b_5 = \cdots = b_{2m+1} = 0$$

$$b_2 = -\frac{\alpha b_0}{3!}$$

$$b_4 = \frac{\alpha^2 b_0}{5!}$$

$$b_6 = -\frac{\alpha^3 b_0}{7!}$$

$$b_8 = \frac{\alpha^4 b_0}{9!} - \frac{b_0}{9!} 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$$

$$b_{10} = -\frac{\alpha^5 b_0}{11!} + \frac{\alpha b_0}{11!} (9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 + 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2)$$

$$b_{12} = \frac{\alpha^6 b_0}{13!} - \frac{\alpha^2 b_0}{13!} (11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 + 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 + 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2)$$

$$b_{14} = -\frac{\alpha^7 b_0}{15!} + \frac{\alpha^3 b_0}{15!} (13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 + 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 + 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 + 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2)$$

$$b_{16} = \frac{\alpha^8 b_0}{17!} - \frac{\alpha^4 b_0}{17!} (15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 + 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 + \cdots + 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2)$$

$$+ \frac{b_0}{17!} 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$$

.....

4)  $n=8$ ,  $(N=4)$  の場合

$$a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = a_{2m+1} = 0$$

$$a_2 = -\frac{\alpha a_0}{2!}$$

$$a_4 = \frac{\alpha^2 a_0}{4!}$$

$$a_6 = -\frac{\alpha^3 a_0}{6!}$$

$$a_8 = \frac{\alpha^4 a_0}{8!}$$

$$\begin{aligned}
a_{10} &= -\frac{\alpha^5 a_0}{10!} - \frac{a_0}{10!} 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\
a_{12} &= \frac{\alpha^6 a_0}{12!} + \frac{\alpha a_0}{12!} (10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \\
a_{14} &= -\frac{\alpha^7 a_0}{14!} - \frac{\alpha^2 a_0}{14!} (12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 + 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \\
&\quad + 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \\
a_{16} &= \frac{\alpha^8 a_0}{16!} + \frac{\alpha^3 a_0}{16!} (14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 + 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \\
&\quad + \cdots + 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \\
&\quad \cdots \cdots \cdots \\
b_1 &= b_3 = b_5 = \cdots = b_{2m+1} = 0 \\
b_2 &= -\frac{\alpha b_0}{3!} \\
b_4 &= \frac{\alpha^2 b_0}{5!} \\
b_6 &= -\frac{\alpha^3 b_0}{7!} \\
b_8 &= \frac{\alpha^4 b_0}{9!} \\
b_{10} &= -\frac{\alpha^5 b_0}{11!} - \frac{b_0}{11!} 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \\
b_{12} &= \frac{\alpha^6 b_0}{13!} + \frac{\alpha b_0}{13!} (11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 + 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2) \\
b_{14} &= -\frac{\alpha^7 b_0}{15!} - \frac{\alpha^2 b_0}{15!} (13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 + 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \\
&\quad + 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2) \\
b_{16} &= \frac{\alpha^8 b_0}{17!} + \frac{\alpha^3 b_0}{17!} (15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 + 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \\
&\quad + \cdots + 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2) \\
&\quad \cdots \cdots \cdots
\end{aligned}$$

## 【付 録 2】 結 合 係 数 $\lambda_{ii}$ , $\lambda_{ij}$ に つ い て

第 $i$ モードと第 $j$ モードとが接続点 $r=r_k$ の両側に存在し、そのときの高さ $z$ に関する高度分布関数を $U_{ik}$ ,  $U_{jk}$ ,  $U_{ik+1}$ ,  $U_{jk+1}$ とする．但し、 $U$ の添字 $i, j$ はいずれもモード番号を、添字 $k, k+1$ はそれぞれ領域 $r \leq r_k$ ,  $r_k \leq r$ を表すものとする．また、接続点 $r=r_k$ の両側の屈折率分布にほとんど差がないものとする、 $U_{ik} \cong U_{ik+1}$ ,  $U_{jk} \cong U_{jk+1}$ であり、それぞれの高度分布関数を実部と虚部に分けて表示すると、

$$\begin{aligned} U_{ik} &= U_{ik}^R + jU_{ik}^I \\ U_{ik+1} &= U_{ik}^R (1 + \Delta_{ik}^R) + jU_{ik}^I (1 + \Delta_{ik}^I) \\ U_{jk} &= U_{jk}^R + jU_{jk}^I \\ U_{jk+1} &= U_{jk}^R (1 + \Delta_{jk}^R) + jU_{jk}^I (1 + \Delta_{jk}^I) \end{aligned} \quad (B-1)$$

となる．但し、

$$1 \gg |\Delta_{ik}^R|, |\Delta_{ik}^I|, |\Delta_{jk}^R|, |\Delta_{jk}^I| \quad (B-2)$$

である．また、添字 $R, I$ はそれぞれ実部、虚部を表すものとする．同一領域内の相異なるモード( $i \neq j$ )の直交性より

$$\llbracket U_{ik} U_{jk} \rrbracket = 0, \quad \llbracket U_{ik+1} U_{jk+1} \rrbracket = 0 \quad (B-3)$$

つまり

$$\begin{aligned} \llbracket U_{ik}^R U_{jk}^R \rrbracket - \llbracket U_{ik}^I U_{jk}^I \rrbracket &= 0 \\ \llbracket U_{ik}^R U_{jk}^I \rrbracket + \llbracket U_{jk}^R U_{ik}^I \rrbracket &= 0 \\ \llbracket U_{ik}^R U_{jk}^R (\Delta_{ik}^R + \Delta_{jk}^R) \rrbracket - \llbracket U_{ik}^I U_{jk}^I (\Delta_{ik}^I + \Delta_{jk}^I) \rrbracket &= 0 \\ \llbracket U_{ik}^R U_{jk}^I (\Delta_{ik}^R + \Delta_{jk}^I) \rrbracket + \llbracket U_{jk}^R U_{ik}^I (\Delta_{jk}^R + \Delta_{ik}^I) \rrbracket &= 0 \end{aligned} \quad (B-4)$$

の関係が得られる．但し、演算記号 $\llbracket \rrbracket$ は

$$\left\| \prod_{n=1}^m A_n \right\| = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{n=1}^m A_n dz \quad (\text{B-5})$$

の積分を定義するものとする．但し， $m \geq 1$ である．従って，積分(3-18)は

$$I_{p,q} = \left\| U_p U_q \right\| \quad (\text{B-6})$$

と書ける．ここで，隣接領域内を伝送する第 $i$ モードと第 $j$ モードの積分は

$$\begin{aligned} I_{ik,jk+1} = \left\| U_{ik} U_{jk+1} \right\| &= \left\| U_{ik}^R U_{jk}^R \Delta_{jk}^R \right\| - \left\| U_{ik}^I U_{jk}^I \Delta_{jk}^I \right\| \\ &+ j \left\| U_{jk}^R U_{ik}^I \Delta_{jk}^R + U_{ik}^R U_{jk}^I \Delta_{jk}^I \right\| \end{aligned} \quad (\text{B-7})$$

$$\begin{aligned} I_{jk,ik+1} = \left\| U_{jk} U_{ik+1} \right\| &= \left\| U_{ik}^R U_{jk}^R \Delta_{ik}^R \right\| - \left\| U_{ik}^I U_{jk}^I \Delta_{ik}^I \right\| \\ &+ j \left\| U_{jk}^R U_{ik}^I \Delta_{ik}^I + U_{ik}^R U_{jk}^I \Delta_{ik}^R \right\| \end{aligned}$$

であり，式(B-4)より

$$I_{ik,jk+1} \approx -I_{jk,ik+1} \quad (\text{B-8})$$

が成立する．接続点 $r=r_k$ の両側の屈折率分布にあまり差異がなければ，各モードの固有値の間で

$$K_{ik} \approx K_{ik+1}, \quad K_{jk} \approx K_{jk+1} \quad (\text{B-9})$$

の関係が成立する．また，式(3-12)より反射係数 $\Gamma_{ik+1}(r_k)$ ， $\Gamma_{jk+1}(r_k)$ はいずれも

$$\Gamma_{ik+1}(r_k) \approx \Gamma_{jk+1}(r_k) \approx 0 \quad (\text{B-10})$$

となる．従って，式(3-17)より結合係数 $\lambda_{ij}^+$ ， $\lambda_{ij}^-$ は

$$\lambda_{ij}^+ = \frac{I_{jk,ik+1}}{I_{ik+1,ik+1}}, \quad \lambda_{ij}^- = \frac{I_{ik,jk+1}}{I_{ik,ik}} \quad (\text{B-11})$$

と近似でき，しかも $I_{ik+1,ik+1} \approx I_{ik,ik}$ であることから

$$\lambda_{ij}^+ \approx -\lambda_{ij}^- \quad (\text{B-12})$$

が成立する．また，相異なるモード間で $I_{ik+1,ik+1} \approx I_{jk+1,jk+1}$ が成立する場合には，式(B-8)より結合係数 $\lambda_{ij}$ と $\lambda_{ji}$ との間に

$$\lambda_{ij} \approx -\lambda_{ji} \quad (\text{B-13})$$

の関係も得られる．

次に、同一モード間の結合係数 $\lambda_{ii}^+$ ,  $\lambda_{ii}^-$ について考える．先ず，各領域間の積分

$$I_{ik, ik+1} = \left[ (U_{ik}^R)^2 - (U_{ik}^I)^2 \right] + \left[ \Delta_{ik}^R (U_{ik}^R)^2 - \Delta_{ik}^I (U_{ik}^I)^2 \right] \\ + j2 \left[ U_{ik}^R U_{ik}^I \right] + j \left[ U_{ik}^R U_{ik}^I (\Delta_{ik}^R + \Delta_{ik}^I) \right] \quad (\text{B-14})$$

$$I_{ik+1, ik+1} = \left[ (U_{ik}^R)^2 - (U_{ik}^I)^2 \right] + 2 \left[ \Delta_{ik}^R (U_{ik}^R)^2 - \Delta_{ik}^I (U_{ik}^I)^2 \right] \\ + j2 \left[ U_{ik}^R U_{ik}^I \right] + j2 \left[ U_{ik}^R U_{ik}^I (\Delta_{ik}^R + \Delta_{ik}^I) \right] \\ = I_{ik, ik+1} + \delta$$

$$I_{ik, ik} = \left[ (U_{ik}^R)^2 - (U_{ik}^I)^2 \right] + j2 \left[ U_{ik}^R U_{ik}^I \right] = I_{ik, ik+1} - \delta$$

を定める．但し， $\delta$ は

$$\delta = \left[ \Delta_{ik}^R (U_{ik}^R)^2 - \Delta_{ik}^I (U_{ik}^I)^2 \right] + j \left[ U_{ik}^R U_{ik}^I (\Delta_{ik}^R + \Delta_{ik}^I) \right] \quad (\text{B-15})$$

とにおいてある．結合係数 $\lambda_{ii}^+$ ,  $\lambda_{ii}^-$ は式(B-11)を $j \rightarrow i$ とすることで与えられるから

$$\frac{1}{\lambda_{ii}^+} = \frac{I_{ik+1, ik+1}}{I_{ik, ik+1}} = 1 + \frac{\delta}{I_{ik, ik+1}}$$

$$\frac{1}{\lambda_{ii}^-} = \frac{I_{ik, ik}}{I_{ik, ik+1}} = 1 - \frac{\delta}{I_{ik, ik+1}} \quad (\text{B-16})$$

となる．上式では $|\delta/I_{ik, ik+1}| \ll 1$ の関係があり，従って結合係数 $\lambda_{ii}^+$ ,  $\lambda_{ii}^-$ は

$$\lambda_{ii}^+ \approx 1 - \frac{\delta}{I_{ik, ik+1}}$$

$$\lambda_{ii}^- \approx 1 + \frac{\delta}{I_{ik, ik+1}} \quad (\text{B-17})$$

で与えられ，結合係数 $\lambda_{ii}^+$ と $\lambda_{ii}^-$ の間には

$$\lambda_{ii}^+ + \lambda_{ii}^- \approx 2$$

$$\arg[\lambda_{ii}^+] \approx -\arg[\lambda_{ii}^-] \quad (\text{B-18})$$

$$|\lambda_{ii}^+| \approx |\lambda_{ii}^-| \approx 1$$

の関係が成立する.

### 【付 録 3】 ス プ リ ッ ト ・ ス テ ッ プ 法 に つ い て

Fockが提案したパラボリック方程式<sup>(42)</sup>は，時間因子に $\exp(j\omega t)$ を採用すると

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - j2k_0 \frac{\partial v}{\partial r} + k_0^2 \{N^2(z, r) - 1\} v = 0 \quad (C-1)$$

である．但し，第3.1節と同様上式では地表面を平面化した円筒座標系 $(r, \theta, z)$ を用いており，解 $v(z, r)$ は式(3-2)の高度分布関数 $U(z, r)$ に，また $N(z, r)$ は式(3-3)の修正屈折率 $N(z)$ に相当する．従って，上式は高さ $z$ と距離 $r$ の2方向とも不均一な大気モデルでの関係式である．

解 $v(z, r)$ のフーリエ変換

$$V(\sigma, r) = \text{FT}[v(z, r)] = \int_{-\infty}^{\infty} v(z, r) e^{-j\sigma z} dz \quad (C-2)$$

をパラボリック方程式(C-1)に適用すると，1階の微分方程式

$$-\sigma^2 V - j2k_0 \frac{dV}{dr} + k_0^2 (N^2 - 1) V = 0 \quad (C-3)$$

が得られ，フーリエ変換 $V(\sigma, r)$ は

$$V(\sigma, r) = \exp \left[ -j \left\{ k_0^2 (N^2 - 1) - \sigma^2 \right\} r / 2k_0 \right] \quad (C-4)$$

で与えられる．但し， $\sigma$ は変換変数である．ここで，微小区間 $[r, r + \Delta r]$ 内で屈折率 $N^2 - 1$ がほとんど変動しないものとする，距離 $r + \Delta r$ でのフーリエ変換は

$$V(\sigma, r + \Delta r) = V(\sigma, r) \exp \left[ -j \left\{ k_0^2 (N^2 - 1) - \sigma^2 \right\} \Delta r / 2k_0 \right] \quad (C-5)$$

となり，上式にフーリエ逆変換

$$v(z, r + \Delta r) = \exp \left\{ -jk_0 (N^2 - 1) \Delta r / 2 \right\} \cdot \text{FT}^{-1} \left[ V(\sigma, r) \exp \left( j\sigma^2 \Delta r / 2k_0 \right) \right] \quad (C-6)$$

を施すことにより，距離 $r + \Delta r$ での式(C-1)の解 $v(z, r + \Delta r)$ が得られる．



ここで、変数変換(2-60), (2-74)を用いて正規化高度 $\eta$ および距離 $R$ を導入すると、パラボリック方程式(C-1)は

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} - j \frac{\partial v}{\partial R} + K(\eta, R) v = 0 \quad (C-7)$$

となる。但し、上式は屈折率の関係(2-62)を用いて $K(\eta, R)$ で表示してある。

ここでも解 $v(\eta, R)$ のフーリエ変換を

$$V(\beta, R) = \text{FT}[v(\eta, R)] = \int_{-\infty}^{\infty} v(\eta, R) e^{-j\beta\eta} d\eta \quad (C-8)$$

で与え、方程式(C-7)に適用すると、フーリエ変換 $V(\beta, R)$ は

$$V(\beta, R) = e^{-j(K-\beta^2)R} \quad (C-9)$$

と求まる。但し、 $\beta$ は変換変数であり、フーリエ変換(C-2)の伝搬定数 $\sigma$ との間に

$$\beta = \sigma H \quad (C-10)$$

の関係がある。ここで、微小区間 $[R, R+\Delta R]$ 内で屈折率 $K(\eta, R)$ がほとんど変動しないものとする、距離 $R+\Delta R$ でのフーリエ変換は

$$V(\beta, R + \Delta R) = V(\beta, R) \cdot e^{-j(K-\beta^2)\Delta R} \quad (C-11)$$

となり、上式にフーリエ逆変換を施すことにより、解 $v(\eta, R+\Delta R)$ は

$$v(\eta, R + \Delta R) = e^{-jK\Delta R} \text{FT}^{-1} \left[ V(\beta, R) e^{j\beta^2\Delta R} \right] \quad (C-12)$$

で与えられる。

以上、ステップ間隔 $\Delta r$ 毎に順次フーリエ変換(C-2)と逆変換(C-6)を繰り返すことにより距離方向に対する数値解 $v(z, r)$ を、あるいはステップ間隔 $\Delta R$ 毎に変換(C-8)とその逆変換(C-12)を繰り返すことにより数値解 $v(\eta, R)$ を決定できる。但し、屈折率 $N^2-1$ あるいは屈折率 $K$ の変動が大きい場合にはステップ間隔は充分細かくとる必要がある。

また、任意の距離での受信電界の高度分布を初期値とする場合、必要とする高

度までで高度分布を打ち切ると、式(C-6)あるいは式(C-12)から得られる受信電界は打ち切りによって生ずる上層からの反射波の影響を受ける。そこで、高度が増すとともに緩やかに減衰するような吸収大気層を打ち切り高度の上層に設け、さらにハミング窓のような打ち切り関数、例えば

$$w_F(h) = a_0 + (1 - a_0) \cos\left(\frac{\pi h}{Z_{\max}}\right), \quad |h| \leq Z_{\max} \quad (\text{C-13})$$

を用いてフィルタリングを施し、反射波をより軽減させる必要がある。但し、 $a_0=0.5$ の場合、打ち切り関数(C-13)はハニング関数(Hanning function)、また $a_0=0.54$ の場合はハミング関数(Hamming function)と呼ばれる。ここに、 $Z_{\max}$ は打ち切り高度である。

なお、フーリエ変換およびその逆変換はFFT(高速フーリエ変換)を用いることにより計算時間の短縮は容易である。